

**ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ  
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»**

**НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ БІЗНЕСУ ТА СУЧАСНИХ  
ТЕХНОЛОГІЙ**

**ФОРМА НАВЧАННЯ ЗАОЧНА  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА СОЦІАЛЬНОЇ  
ІНФОРМАТИКИ**

**Допускається до захисту**

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ О.О. Ємець

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 202\_ р.

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА  
ДО БАКАЛАВРСЬКОЇ РОБОТИ**

**на тему**

**Тренажер з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» та розробка його програмного забезпечення**

**зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»**

**Виконавець роботи** Борута Іван Володимирович \_\_\_\_\_ « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021р.

**Науковий керівник** к.ф.-м.н., доц., Парфьонова Тетяна Олександрівна  
\_\_\_\_\_ « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021р.

**ПОЛТАВА 2021 р.**

## РЕФЕРАТ

**Записка:** 54 с., 31 рис., 4 додатки (на 3 сторінках), 10 джерел.

**Предмет розробки** – тренажер для дистанційного курсу «Дискретна математика» з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами».

**Мета роботи** – побудувати алгоритм та створити програмну реалізацію навчального тренажеру з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика».

**Методи, які були використані для розв’язування задачі** – для створення програми було обрано мову програмування C++ та середовище *Borland Builder*. Для створення алгоритму тренажеру використано теоретичні матеріали дистанційного курсу «Дискретна математика».

Розроблено алгоритм шести прикладів для тренажеру, що відповідають темі «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами», яка раніше не була реалізована. Здійснена програмна реалізація даного алгоритму.

Результати роботи впроваджені в дистанційних курс «Дискретна математика» Полтавського університету економіки і торгівлі.

**Ключові слова:** ТРЕНАЖЕР, ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА, ВІДНОШЕННЯ, ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ, ПЕРЕРІЗ.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ....	3
ВСТУП.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	6
1.1. Постановка задачі.....	6
2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД .....	9
2.1. Огляд існуючих програмних продуктів, створених для навчальних цілей.....	9
2.2. Обґрунтування вибору мови програмування.....	13
3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.....	16
3.1. Алгоритм тренажера.....	16
3.1.1. Алгоритми реалізації знаходження області визначення та області значень відношення. ....	16
3.1.2. Алгоритми реалізації знаходження перерізів відношень.....	21
3.1.3. Алгоритм реалізації способів представлення відношень.....	26
4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	31
4.1. Блок-схема.....	31
4.2. Інструкція користувача.....	31
4.3. Опис реалізації тренажеру.....	44
ВИСНОВКИ.....	52
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	53
ДОДАТОК А. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ВІДНОШЕНЬ.....	55
ДОДАТОК Б. ПЕРЕРІЗИ ВІДНОШЕНЬ.....	62
ДОДАТОК В. СПОСОБИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВІДНОШЕННЯ.....	75
ДОДАТОК Г. КОД ПРОГРАМИ.....	85

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

Умовні позначення, символи, скорочення, терміни	Пояснення умовних позначень, символів, скорочень
Область визначення відношення	сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення $\rho$
Область значень відношення	сукупність всіх других координат впорядкованих пар відношення $\rho$ , тобто
Переріз за елементом $x_i$ відношення $\rho$	множина $A(x_i)$ таких $y$ , що пари $(x_i, y) \in \rho$
Переріз по множині відношення	множина, що є об'єднанням перерізів за елементами деякої множини $A \subset X$
Фактор-множина $Y / \rho$ множини $Y$ за відношенням $\rho$ .	множина всіх перерізів $A(x_i)$ відношення $\rho$
$A(x_i)$	переріз за елементом $x_i$
$D(\rho)$	область визначення відношення $\rho$
$E(\rho)$	область значень відношення $\rho$
$\rho$	відношення

## ВСТУП

В сучасному світі одним з потужних напрямків науково-технічного прогресу є комп'ютеризація переважно всіх сфер людської діяльності. Особливий сегмент серед них займає освітня діяльність. В часи пандемії особливо поширеним стало дистанційне навчання, отже, створення різних програмних засобів, які активізують навчальну та пізнавальну активність студентів, залишається досить актуальним. Серед різних навчальних програмних засобів таких, як, програми-тести, електронні підручники та довідники, електронні наочні матеріали, електронні опорні конспекти та ін., особливу увагу займають програми-тренажери. Створення такої програми в рамках даної роботи дає можливість відпрацювання студентами спеціальності «Комп'ютерні науки» навичок розв'язування задач з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» в курсі «Дискретна математика». Серед тренажерів даного дистанційного курсу подібних задач не було реалізовано, тому створення такого програмного продукту, який може бути використаний для всіх форм навчання, є важливим.

Мета роботи – побудувати алгоритм та створити програмну реалізацію навчального тренажеру з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика».

Завдання, які необхідно виконати для досягнення мети:

- опрацювати методичні рекомендації до виконання бакалаврської роботи;
- сформулювати постановку задачі;
- виконати огляд літературних джерел, що використовується для вивчення даної теми, а також огляд існуючих програмних продуктів, які використовуються при вивченні різних дисциплін;
- вивчення теоретичного матеріалу з теми;

- розробка алгоритму навчального тренажеру;
- побудова блок–схеми алгоритму тренажеру;
- вибір оптимальної платформи для програмної реалізації тренажеру;
- створення програмної реалізації тренажеру;
- проведення тестування тренажеру.

Об'єктом розробки є програмне забезпечення для дистанційного навчання з курсу «Дискретна математика».

Предметом розробки є тренажер для дистанційного курсу «Дискретна математика» з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами».

Методи розробки. Для створення програми було обрано мову програмування C++ та середовище *Borland Builder*. Для створення алгоритму тренажеру використано теоретичні матеріали дистанційного курсу «Дискретна математика».

Особистим внеском є алгоритмізація та програмна реалізація навчального тренажеру з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами». Створена програма може бути використана у навчальному процесі ПУЕТ при вивченні курсу «Дискретна математика». Використовуючи даний тренажер студент зможе отримувати теоретичні і практичні навички при самостійному вивченні даної теми, що є практично необхідним. Даний тренажер впроваджено в дистанційний курс «Дискретна математика» в Полтавському університеті економіки та торгівлі.

Пояснювальна записка до бакалаврської роботи містить в собі: вступ; постановку задачі; інформаційний огляд, в якому здійснено огляд існуючих програмних продуктів, створених для навчальних цілей та обґрунтовано вибір мови програмування; теоретичну частину, де наведено побудований алгоритм для тренажера; практичну частину, де описано блок–схему, сформовано інструкцію користувача та здійснено опис реалізації тренажеру; висновки; список літератури; три додатки. Обсяг пояснювальної записки 54 сторінки, 31 рисуноків, список літератури – 10 джерел.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

### 1.1. Постановка задачі

Для досягнення мети даної роботи необхідно спершу опрацювати теоретичний матеріал з даної тематики, розв'язати вибрані задачі, побудувати алгоритм роботи тренажера. Після цього треба обрати мову програмування для програмної реалізації, враховуючи необхідність впровадження даного продукту в дистанційний курс. Інтерфейс тренажера має бути зручним і зрозумілим для користувача.

Вимоги до програмної реалізації елементів тренажера.

На головній сторінці, крім інформації про автора та теми, розміщується кнопка ПУСК, після натиснення якої з'являється доступ до трьох вкладок із назвами:

- 1) «Область визначення та область значень відношень»,
- 2) «Перерізи відношень»,
- 3) «Способи представлення відношення».

В алгоритмі передбачити набір відповідних необхідних теоретичних питань до кожної задачі.

Розділ «Область визначення та область значень відношень» містить два приклади: перший – визначення області визначення та області значень заданого відношення, що задане на одній множині, а другий – визначення області визначення та області значень відношення, що задане на різних множинах.

При відкритті відповідного розділу та виборі прикладу (спершу передбачити можливим вибір прикладу 1, а після його опрацювання вибір прикладу 2) на екрані з'являється умова задачі, яка постійно має бути видимою:

*Приклад 1.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множині  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}.$$

Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

*Приклад 2.* Розглянемо  $\rho$  – бінарне відношення подільності, визначене на множинах  $X = \{5, 6, 7\}$  та  $Y = \{1, 2, 4\}$ . Нехай відношення  $x\rho y$  –  $x$  націло ділиться на  $y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Записати відношення  $\rho$  множиною впорядкованих пар. Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

Розділ «Перерізи відношень» містить три приклади: перший – визначення перерізів за елементами заданого відношення, другий – побудова фактор-множини за даним відношенням, а третя – визначення перерізу по множині для заданого відношення.

*Приклад 3.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Знайти всі перерізи за елементами відношення  $\rho$ .

*Приклад 4.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Записати фактор-множину  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

*Приклад 5.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Знайти переріз  $\rho(C)$  по множині  $C = \{1, 4\}$  відношення  $\rho$ .

Розділ «Способи представлення відношення» містить один приклад, але який включає декілька завдань, що пов'язані із представленням заданого відношення у вигляді множини впорядкованих пар, матрицею суміжності та графом.



*Приклад 6.* Нехай задано відношення  $\rho$ : « $x$  є дільником  $y$ » на множинах  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  та  $B = \{8, 9, 15, 20, 25\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ .

Завдання:

- 1) записати задане відношення множиною впорядкованих пар,
- 2) представити відношення матрицею суміжності,
- 3) представити відношення графом.

Теоретична частина роботи має включати в себе 6 алгоритмів реалізації всіх перелічених прикладів відповідних розділів. У кожному алгоритмі в разі неправильного виконання завдань з'являється повідомлення про помилку, у якому вказано або рекомендації до виконання, або ж безпосередньо правильна відповідь.

При виборі програмних засобів для реалізації завдання врахувати те, що даний тренажер необхідно впровадити в систему Moodle ПУЕТ.

## 2. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД

### 2.1. Огляд існуючих програмних продуктів, створених для навчальних цілей.

Дисципліна «Дискретна математика» займає особливе місце в засвоєнні студентами математичних основ роботи комп'ютерної техніки. Вона дає розуміння підходів та спеціальні знання щодо застосування математичних методів до вирішення алгоритмічних задач різної складності [1-4], [6-8].

Дана дисципліна є базовою для ряду інших курсів, що вивчаються студентами спеціальності «Комп'ютерні науки» такі, як «Математична логіка», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Теорія інформації та кодування», «Програмування», «Елементи комбінаторної оптимізації» та ін.

Останнім часом стрімко поширюється впровадження дистанційної освіти в навчальний процес. Це вимагає створення програмних засобів, які б забезпечували високоякісну підготовку студентів. Серед множини таких засобів важливу роль відіграють електронні навчальні тренажери, які призначені для відпрацювання умінь і навичок у конкретній предметній області. Розглянемо та проаналізуємо декілька таких програмних продуктів.

В рамках виконання магістерської роботи в Дніпродзержинському державному технічному університеті були створені програмні модулі тренажери «Множини», «Булеві функції», «Теорія графів», які дають можливість студентам самостійно опрацьовувати ряд задач курсу «Дискретна математика», а також можуть бути використані під час проведення навчальних занять [7]. Разом з цим здійснюється контроль якості засвоєння матеріалу в режимі тестування.

Головне призначення програми, що реалізує розв'язання задач з теми «Множини. Операції над множинами» – ілюстрація графічного зображення операцій над трьома множинами. Для графічного представлення формул, що складаються із декількох операцій в програмі зображуються послідовними

кроками. Крім цього у програмі розглядаються приклади, в яких доводяться рівносильності формул, що мають різні представлення (рис. 2.1).

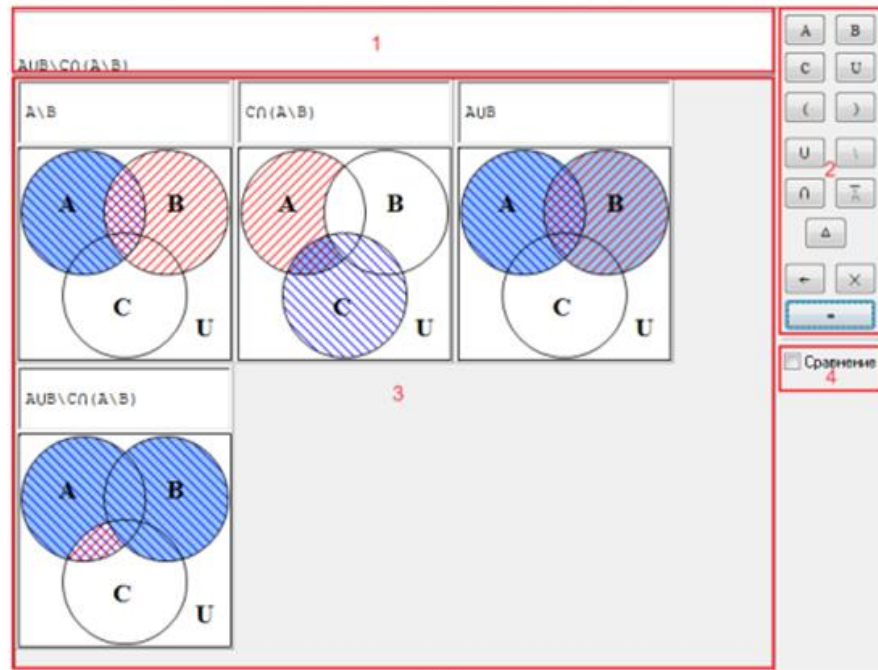


Рисунок 2.1 – Інтерфейс програми з теми «Множини. Операції над множинами»

Розроблено також програми з тем «Булеві функції» та «Теорія графів», де також передбачено ряд запитань до студента, на які він має відповісти для успішного проходження кожного кроку. Але при цьому не враховано можливість коригування відповіді та пояснення причини помилки, а також не передбачена можливість доступу до теоретичного матеріалу. В даних програмах переважно акценти зроблені на контроль за виконанням, а не на навчальні властивості.

За останні роки досить велику кількість тренажерів в рамках виконання бакалаврських та магістерських робіт було розроблено студентами Полтавського університету економіки і торгівлі спеціальності «Комп'ютерні науки», зокрема, з курсу «Дискретна математика».

При реалізації тренажеру з теми «Операції над множинами», що створений студентом Пасько С., використовується мова програмування Java та середовище NetBeans (рис. 2.2.).

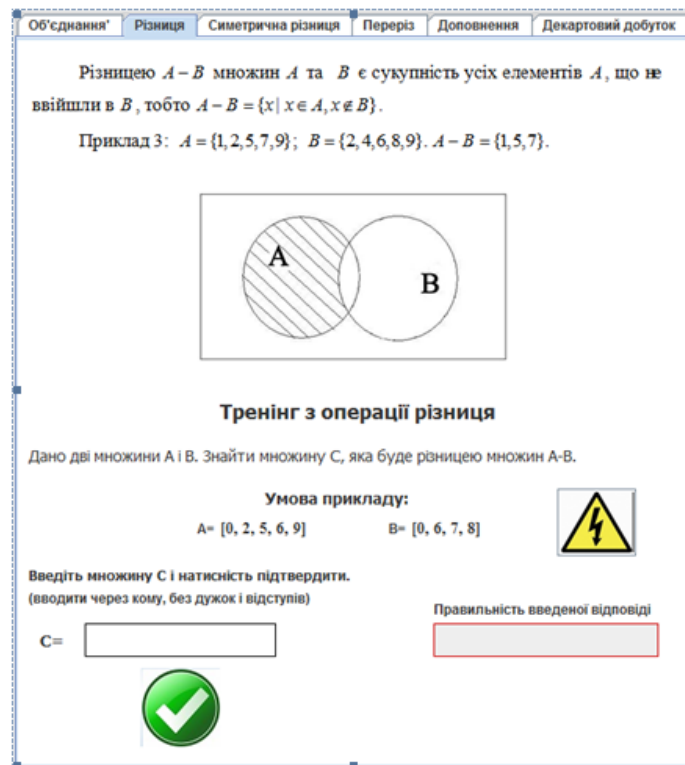


Рисунок 2.2 – Тренажер з теми «Операції над множинами» (Пасько С.)

Для створення тренажеру з теми «Висловлювання» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» Овсяником С.А. використано мову програмування C# та графічний редактор Adobe Photoshop CS4 (рис.2.3).

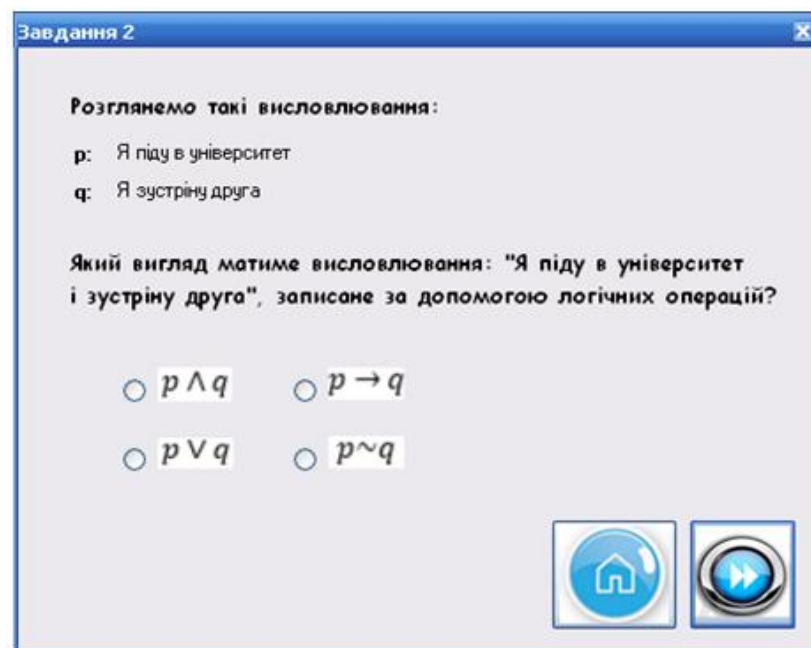


Рисунок 2.3 – Тренажер з теми «Висловлювання» (Овсяник С.)

Іваховою Ю. було здійснено алгоритмізацію та програмну реалізацію з теми «Матриці суміжності та інцидентності» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика», в якій використано мову програмування C# (рис.2.4).

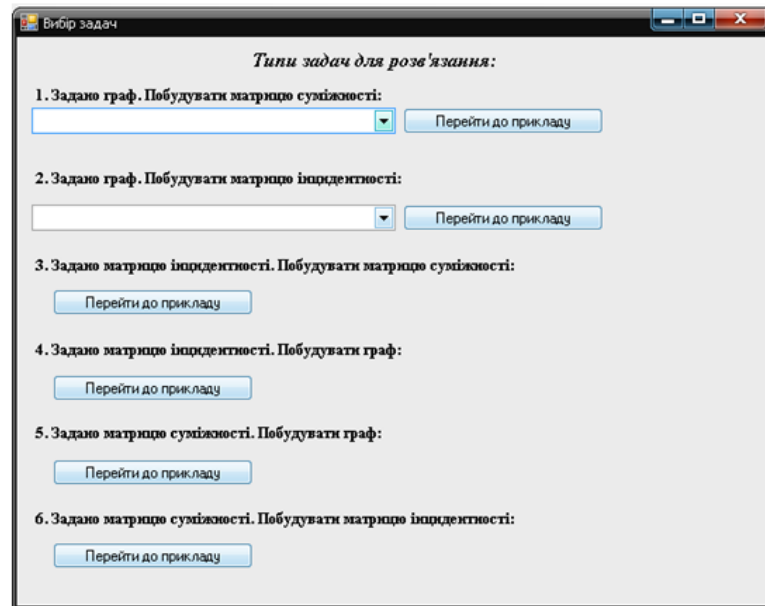


Рисунок 2.4 – Тренажер з теми «Матриці суміжності та інцидентності»  
(Івахова Ю.)

Для написання програми-тренажеру з теми «Булеві функції та їх обчислення» Стасюк Ю. було обрано мову C++ та середовище для створення візуальних програм Borland C++ Builder (рис. 2.5.).

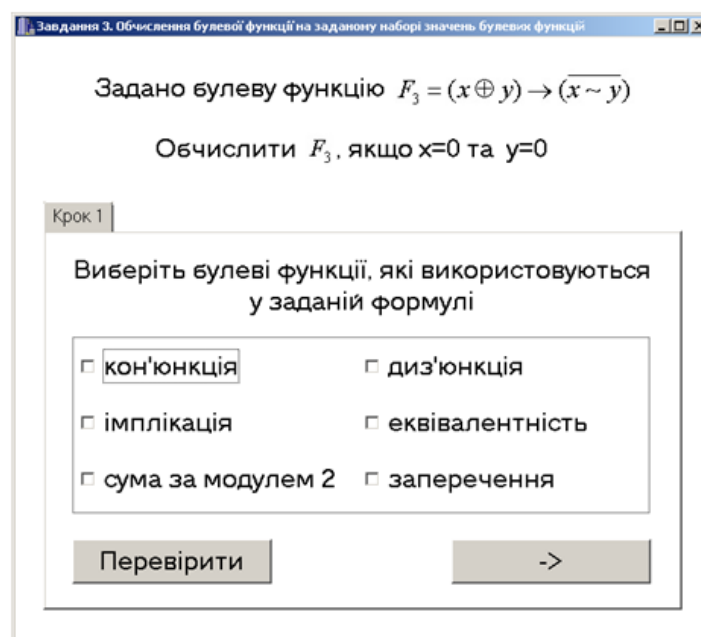


Рисунок 2.5 – Тренажер з теми «Булеві функції та їх обчислення»

Аналізуючи розглянуті тренажери можна виділити як позитивні сторони: основна увага зосереджена на тому, що тренажер має бути навчальним. При цьому практичні задачі доповнені необхідними теоретичними запитаннями, в разі помилкових відповідей наводяться рекомендації чи правильні відповіді з поясненням. Це надає можливість опанувати студентом незрозумілі питання. Серед недоліків можна назвати відсутність можливостей повертатись до пройдених кроків, до теоретичного матеріалу, відсутність коментарів та пояснень помилкових відповідей.

Чимало програм-тренажерів в ПУЕТ створено не тільки з курсу «Дискретна математика». Зараз охоплено майже всі дисципліни спеціальності «Комп'ютерні науки» [6,10]. Позитивним також є поява тренажерів, в яких враховується зміна мови таких як англійська, російська та українська. Це особливо стає зараз актуальним, так як збільшується кількість іноземних студентів. Робота в цьому напрямку триває.

## **2.2. Обґрунтування вибору мови програмування.**

Для створення програмних продуктів гнучким та зручним є візуальне середовище програмування Borland C++ Builder. Дана система розробки прикладних програм для Windows займає лідерські позиції як серед професійних програмістів, так і серед осіб, які ніколи не займались програмуванням професійно [9].

Важливою перевагою C++ Builder є мова C++, яка лежить в основі, як одна із найпотужніших сучасних алгоритмічних мов. Крім того, що C++ Builder є досить простим, дає широкий спектр можливостей при розробці складних і ефективних програм.

Інтегроване середовище розробки (ICP) C++ Builder – це середовище, яке містить все, що необхідно для проектування, запуску і тестування програмних продуктів. Тут акцент направлено на полегшення процесу створення програмних продуктів. Дане середовище включає в себе редактор кодів, інструментальні панелі, редактор зображень, інструментарій баз даних тощо.

C ++ Builder і Delphi стали одними з найпопулярніших на сьогоднішній день інструментів для створення як настільних, так і корпоративних інформаційних систем завдяки унікальному поєднанню зручності розробки користувацьких інтерфейсів, компонентної архітектури, однотипності доступу до різноманітних баз даних, починаючи від плоских таблиць формату dBase і Paradox і кінчаючи серверними СУБД.

У проектах C ++ Builder можна використовувати не тільки бібліотеку компонентів Delphi, але і код, написаний на Object Pascal, а також форми і модулі Delphi. Підтримується візуальне спадкування форм і модулів даних, у тому числі і створених в Delphi. Ці можливості з'явилися завдяки включенню в C ++ Builder обох компіляторів C ++ і Object Pascal.

Це означає, що можна створювати спільні проекти, використовуючи обидва засоби розробки - і C ++ Builder, і Delphi. Частина однієї програми можуть бути створені за допомогою двох засобів, і тепер до роботи над проектом можна залучати розробників, які використовують як Delphi, так і C ++. По-друге, і це дуже важливо, C ++ Builder може використовувати компоненти, створені для Delphi, а їх за останні кілька років створено величезну кількість. Це багатство, накопичене розробниками усього світу, сьогодні здатне задовольнити найрізноманітніші запити.

C ++ Builder надає програмісту широкі можливості повторного використання коду не тільки за рахунок наявності бібліотеки компонентів, але і за рахунок підтримки стандарту ActiveX, що дозволяє вбудовувати в додатки ActiveX-компоненти як сторонніх виробників, так і створені власноруч за допомогою самого C ++ Builder .

Важливим фактором, що впливає на популярність цих продуктів, є їх відкритість, яка полягає в можливості створення з їх допомогою не тільки додаткових компонентів і елементів ActiveX, поліпшують функціональність додатку, а й різних експертів, редакторів властивостей компонентів, що поліпшують функціональність самого середовища розробки.

Структура класів, створених мовою C++ системи програмування Borland C++ Builder, побудована в бібліотеці VCL (Visual Component Library) і містить потужний набір засобів та бібліотек, що підвищують продуктивність праці програмістів і скорочують тривалість циклу розроблення.

Багатофункціональне інтегроване середовище C++ Builder містить компілятор, який відповідає вимогам стандарту ANSI/ISO, вбудований дизайнер форм, багатий набір засобів для роботи з компонентами, інструмент Object Inspector, менеджер проектів і налагоджувач. Новий багатоцільовий менеджер проектів з відкритою архітектурою забезпечує повний контроль над вихідними текстами і процесом компоновки, що дозволяє переглядати залежності модулів вихідного коду і налагоджувати параметри компіляції, компоновки і налагодження для кожного з модулів проекту. За допомогою цього середовища можна створити додаток будь-якої складності з привабливим графічним інтерфейсом.



### 3. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

#### 3.1 Алгоритм тренажера

##### 3.1.1 Алгоритми реалізації знаходження області визначення та області значень.

*Приклад 1.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множині  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}.$$

Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

**Алгоритм 1.**

**Крок 1.** На екрані з'являється перше запитання:

*Виберіть одну правильну відповідь.* Областю визначення відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається

- сукупність всіх елементів множини  $A$ , тобто  $D(\rho) = A$ .

- сукупність всіх елементів множини  $B$ , тобто  $D(\rho) = B$ .

- сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ ,

тобто  $D(\rho) = \{x \mid \text{існує такий елемент } y, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ .

- сукупність всіх других координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ ,

тобто  $D(\rho) = \{y \mid \text{існує такий елемент } x, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ .

Якщо обрано правильну відповідь, то здійснюється перехід на наступний крок. Інакше – відображається повідомлення про помилку: «Відповідь обрано помилково. Областю визначення відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $D(\rho) = \{x \mid \text{існує такий елемент } y, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ . Перехід на крок 2.

**Крок 2.** Наступне питання:

*Виберіть одну правильну відповідь.* Областю значень відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається

- сукупність всіх елементів множини  $A$ , тобто  $E(\rho) = A$ .

- сукупність всіх елементів множини  $B$ , тобто  $E(\rho) = B$ .

- сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $E(\rho) = \{x \mid \text{існує такий елемент } y, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ .

- сукупність всіх других координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $E(\rho) = \{y \mid \text{існує такий елемент } x, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ .

Якщо обрано правильну відповідь, то здійснюється перехід на крок 3. В іншому разі в повідомленні про помилку маємо: «Відповідь обрано помилково. Областю значень відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається сукупність всіх других координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $E(\rho) = \{y \mid \text{існує такий елемент } x, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ . Перехід на крок 3.

**Крок 3.** Питання на екрані.

*Виберіть одну правильну відповідь. Скільки елементів буде містити область визначення  $D(\rho)$  відношення для прикладу 1?*

- один,
- два,
- три,
- чотири.

Правильна відповідь – перехід на крок 4.

Помилкова – повідомлення: «У відношенні  $\rho = \{(1,2), (3,1), (1,1), (5,2), (5,4), (1,3), (4,1), (3,6), (4,3), (4,2)\}$  перші координати впорядкованих пар – це 1, 3, 1, 5, 5, 1, 4, 3, 4, 4. Не враховуючи повторення маємо чотири різні елементи.» Перехід на крок 4.

**Крок 4.** Заповніть порожні клітинки.

Область визначення відношення  $\rho - D(\rho) = \{\square, \square, \square, \square\}$

Користувачу потрібно одну за одною заповнити клітини. При цьому програмно треба врахувати можливість введення лише одного із чотирьох значень 1, 3, 4, 5 у першу клітинку.

Далі одне із трьох, що залишились у другу клітину. І так далі.

Має бути відповідь: Область визначення  $D(\rho) = \{1, 3, 4, 5\}$ .

Перехід на крок 5.

**Крок 5.** Питання на екрані.

*Виберіть одну правильну відповідь. Скільки елементів буде містити область значень  $E(\rho)$  відношення для прикладу 1?*

- один,
- три,
- п'ять,
- десять.

Правильна відповідь – перехід на крок 6.

Помилкова – повідомлення: «У відношенні  $\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}$  другі координати впорядкованих пар – це 2, 1, 1, 2, 4, 3, 1, 6, 3, 2. Не враховуючи повторення маємо п'ять різних елементів». Перехід на крок 6.

**Крок 6.** Заповніть порожні клітинки.

Область значень відношення  $\rho - E(\rho) = \{\square, \square, \square, \square, \square\}$

Користувачу потрібно одну за одною заповнити клітини. При цьому програмно треба врахувати можливість введення лише одного із п'яти значень 1, 2, 3, 4, 6 у першу клітинку. Далі одне із чотирьох, що залишились у другу клітину. І так далі.

Має бути відповідь: Область значень  $E(\rho) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

Завершення тренінгу. Перехід до прикладу 2.

*Приклад 2.* Розглянемо  $\rho$  – бінарне відношення подільності, визначене на множинах  $X = \{5, 6, 7\}$  та  $Y = \{1, 2, 4\}$ . Нехай відношення  $x\rho y$  –  $x$  націло ділиться на  $y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Записати відношення  $\rho$  множиною впорядкованих пар. Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

## Алгоритм 2.

**Крок 1.** Відношення  $\rho$  є підмножиною декартового добутку  $X \times Y$ , який має вигляд:

$$- X \times Y = \{(5,1), (5,5), (5,2), (5,4), (6,6), (6,1), (6,2), (6,4), (7,7), (7,1), (7,2), (7,4)\}$$

$$- X \times Y = \{(5,1), (5,2), (5,4), (6,1), (6,2), (6,4), (7,1), (7,2), (7,4)\}$$

$$- X \times Y = \{(5,1), (1,1), (5,2), (5,4), (2,2), (6,1), (6,2), (6,4), (4,4), (7,1), (7,2), (7,4)\}$$

$$- X \times Y = \{(1,5), (1,6), (1,7), (2,5), (2,6), (2,7), (4,5), (4,6), (4,7)\}$$

Якщо за першою спробою зроблено неправильний вибір, то з'являється повідомлення:

«Декартовим добутком  $X \times Y$  називається множина всіх впорядкованих пар  $(x, y)$  таких, що  $x \in X$  та  $y \in Y$  .».

Якщо ж за другою спробою знову користувач помиляється, то повідомлення матиме вигляд:

«Помилка. Декартовий добуток  $X \times Y$  множин  $X$  та  $Y$  – це множина впорядкованих пар  $X \times Y = \{(5,1), (5,2), (5,4), (6,1), (6,2), (6,4), (7,1), (7,2), (7,4)\}$

, де першою координатою пари  $(x, y)$  є елемент  $x$  із множини  $X = \{5, 6, 7\}$ , а другою координатою  $y$  пари  $(x, y)$  є елемент із множини  $Y = \{1, 2, 4\}$  .». Перехід на крок 2.

**Крок 2.** Які пари із множини  $X \times Y$  задовольняють умові прикладу 2, тобто для яких пар із множини  $X \times Y = \{(5,1), (5,2), (5,4), (6,1), (6,2), (6,4), (7,1), (7,2), (7,4)\}$  виконується, що  $x\rho y$  –  $x$  націло ділиться на  $y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ?

$$- (5,1), (5,2), (5,4)$$

$$- (5,1), (6,1), (7,1)$$

$$- (5,1), (6,1), (6,2), (7,1)$$

$$- (5,2), (5,4), (6,2), (6,4), (7,2), (7,4)$$

Правильна відповідь – перехід на крок 3, інакше – повідомлення: «Вибір помилковий. Умова  $x$  націло ділиться на  $y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  виконується для пар  $(5,1), (6,1), (6,2), (7,1)$ . Отже, задане відношення  $\rho = \{(5,1), (6,1), (6,2), (7,1)\}$  .». Перехід на крок 3.

**Крок 3.** Запишіть у клітинку кількість елементів області визначення знайденого відношення  $\rho = \{(5,1), (6,1), (6,2), (7,1)\}$ .

Кількість елементів  $|D(\rho)| = \square$ .

Правильна відповідь – 3. Якщо ж введено іншу відповідь, то з'являється пояснення «Помилка. Область визначення відношення – це сукупність перших координат його впорядкованих пар. В нашому випадку – це три різні елементи.». Перехід на крок 4.

**Крок 4.** Заповніть порожні клітинки.

Область визначення відношення  $D(\rho) = \{\square, \square, \square\}$

Користувачу потрібно одну за одною заповнити клітини. При цьому програмно треба врахувати можливість введення лише одного із трьох значень 5, 6, 7 у першу клітинку. Далі одне із двох, що залишились у другу клітину, і одне у третю. Має бути відповідь: «Область визначення  $D(\rho) = \{5, 6, 7\}$  .» (Очевидно що допустимими будуть і варіанти відповіді  $D(\rho) = \{5, 7, 6\}, D(\rho) = \{6, 5, 7\}, D(\rho) = \{6, 7, 5\}, D(\rho) = \{7, 5, 6\}, D(\rho) = \{7, 6, 5\}$ ).

Перехід на крок 5.

**Крок 5.** Запишіть у клітинку кількість елементів області значень знайденого відношення  $\rho = \{(5,1), (6,1), (6,2), (7,1)\}$

Кількість елементів  $|E(\rho)| = \square$ .

Правильна відповідь – 2. Якщо ж введено іншу відповідь, то з'являється пояснення «Помилка. Область значень відношення – це сукупність других координат його впорядкованих пар. В нашому випадку – це два різні елементи.». Перехід на крок 6.

**Крок 6.** Заповніть порожні клітинки.

Область визначення відношення  $E(\rho) = \{\square, \square\}$

Користувачу потрібно одну за одною заповнити клітини. При цьому треба врахувати можливість введення лише одного із двох значень 1, 2 у першу клітинку. Далі одне, що залишилось у другу клітину. Має бути відповідь: «Область значень  $D(\rho) = \{1, 2\}$  .» (або допустимо також  $D(\rho) = \{2, 1\}$  .).

Завершення тренінгу.

### 3.1.2 Алгоритми реалізації знаходження перерізів відношень

*Приклад 3.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Знайти всі перерізи за елементами відношення  $\rho$ .

**Алгоритм 3.**

**Крок 1.** На екрані з'являється перше запитання:

Вибрати одне правильне означення перерізу за елементом відношення  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  таких  $y$ , що пари  $(y, x_i) \in \rho$  називається перерізом за елементом  $x_i$  відношення  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  пар  $(x_i, y) \in \rho$  називається перерізом за елементом  $x_i$  відношення  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  таких  $y$ , що пари  $(x_i, y) \in \rho$  називається перерізом за елементом  $x_i$  відношення  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  таких пар  $(x_i, y)$ , що  $(x_i, y) \notin \rho$  називається перерізом за елементом  $x_i$  відношення  $\rho$ .

Якщо обрано правильну відповідь, то здійснюється перехід на наступний крок. Інакше – відображається повідомлення про помилку: «Відповідь не

правильна. Множина  $A(x_i)$  таких  $y$ , що пари  $(x_i, y) \in \rho$  називається перерізом за елементом  $x_i$  відношення  $\rho$ . ». Перехід на крок 2.

**Крок 2.** Наступне питання:

«Знайдемо перерізи відношення  $\rho$  –  $A(1)$ ,  $A(2)$ ,  $A(3)$  та  $A(4)$ . Скільки елементів у цих множинах?

*Ввести відповідні значення у комірки:*

$$|A(1)| = \square, \quad |A(2)| = \square, \quad |A(3)| = \square, \quad |A(4)| = \square. \gg$$

Користувач одне за одним вводить значення у комірки. При цьому кожна наступна комірка стає активною для введення лише після того, як в попередню введено правильну відповідь.

Правильна відповідь має бути наступною:

$$1) |A(1)| = \boxed{2}, \quad 2) |A(2)| = \boxed{2}, \quad 3) |A(3)| = \boxed{0}, \quad 4) |A(4)| = \boxed{1}.$$

Якщо введено інші значення, то з'являються повідомлення про помилку:

1) Кількість елементів множини  $A(1)$  визначається кількістю пар  $(1, y) \in \rho$ , тобто  $(1, b)$  та  $(1, c)$ . Отже,  $|A(1)| = 2$ .

2) Кількість елементів множини  $A(2)$  визначається кількістю пар  $(2, y) \in \rho$ , тобто  $(2, a)$  та  $(2, c)$ . Отже,  $|A(2)| = 2$ .

3) Кількість елементів множини  $A(3)$  визначається кількістю пар  $(3, y) \in \rho$ . Таких пар немає у  $\rho$ . Отже,  $|A(3)| = 0$ .

4) Кількість елементів множини  $A(4)$  визначається кількістю пар  $(4, y) \in \rho$ , тобто  $(4, e)$ . Отже,  $|A(4)| = 1$ . Перехід на крок 3.

**Крок 3.** Завдання на екрані.

*Вибрати елементи, які належать перерізу.*

Переріз за елементом 1:  $A(1)$ .

$$\bullet a. \quad \bullet \underline{b}. \quad \bullet \underline{c}. \quad \bullet d. \quad \bullet e. \quad \bullet \emptyset.$$

Переріз за елементом 2:  $A(2)$ .

$$\bullet \underline{a}. \quad \bullet b. \quad \bullet \underline{c}. \quad \bullet d. \quad \bullet e. \quad \bullet \emptyset.$$

Переріз за елементом 3:  $A(3)$ .

$$\bullet a. \quad \bullet b. \quad \bullet c. \quad \bullet d. \quad \bullet e. \quad \bullet \underline{\emptyset}.$$

Переріз за елементом 4:  $A(4)$ .

$$\bullet a. \quad \bullet b. \quad \bullet c. \quad \bullet d. \quad \bullet \underline{e}. \quad \bullet \emptyset.$$

Правильний вибір – на екрані з'являються відповідно відповіді:

$$A(1) = \{b, c\}, \quad A(2) = \{a, c\}, \quad A(3) = \emptyset, \quad A(4) = \{e\}.$$

Якщо вибір помилковий, то з'являються повідомлення про помилку відповідно для кожного перерізу:

1) Маємо дві пари  $(1, b)$  та  $(1, c)$ , що належать відношенню  $\rho$ . Тоді за означенням  $A(1) = \{b, c\}$ .

2) Маємо дві пари  $(2, a)$  та  $(2, c)$ , що належать відношенню  $\rho$ . Тоді за означенням  $A(2) = \{a, c\}$ .

3) Не маємо жодної пари  $(3, y) \in \rho$ , тому  $A(3) = \emptyset$ .

4) Маємо одну пару  $(4, e)$ , що належить відношенню  $\rho$ . Тоді за означенням  $A(4) = \{e\}$ .

Алгоритм прикладу 1 завершено.

*Приклад 4.* Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Записати фактор-множину  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

**Алгоритм 4.**

**Крок 1.** На екрані з'являється перше запитання:

Вибрати означення фактор-множини  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

- Множина таких  $y$ , що пари  $(y, x_i) \in \rho$  називається фактор-множиною  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .



- Множина всіх перерізів  $A(x_i)$  відношення  $\rho$  називається фактор-множиною  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

- Множина, що є об'єднанням перерізів за елементами деякої множини  $Y \subset X$  називається фактор-множиною  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  таких пар  $(x_i, y)$ , що  $(x_i, y) \notin \rho$  називається фактор-множиною  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .

Правильна відповідь – перехід на крок 2. Інакше – повідомлення про помилку: «Помилка. Множина всіх перерізів  $A(x_i)$  відношення  $\rho$  називається фактор-множиною  $Y / \rho$  множини  $Y$  за відношенням  $\rho$ .» Перехід на крок 2.

**Крок 2.** На екрані:

*Здійснити вибір елементів, які належать фактор-множині  $Y / \rho$ .*

- $a$ .                      •  $b$ .                      •  $c$ .                      •  $e$ .                      •  $\emptyset$ .
- $\{a, c\}$ .                •  $\{b, c\}$ .                •  $\{b, e\}$ .                •  $b, c, e$ .                •  $a, c, e$ .
- $\{a\}$ .                    •  $\{b\}$ .                    •  $\{c\}$ .                    •  $\{d\}$ .                    •  $\{e\}$ .

Якщо вибір зроблено правильно, то на екрані з'являється відповідь:  $Y / \rho = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{e\}, \emptyset\}$  і алгоритм завершено.

Якщо ж помилковий, то спершу з'являється повідомлення:

«Для виконання даного завдання використаємо розв'язок попереднього прикладу:  $A(1) = \{b, c\}$ ,  $A(2) = \{a, c\}$ ,  $A(3) = \emptyset$ ,  $A(4) = \{e\}$ .»

Користувачу знову надається можливість зробити вибір. Якщо знову помилка, то повідомлення про помилку матиме вигляд: «Помилка. Множина всіх перерізів відношення є фактор-множиною. Тобто  $Y / \rho = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{e\}, \emptyset\}$ .». Алгоритм завершено.

**Приклад 5.** Нехай задано відношення  $\rho$  на множинах  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  та  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ , що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (4, e), (1, c)\}.$$

Знайти переріз  $\rho(C)$  по множині  $C = \{1, 4\}$  відношення  $\rho$ .

**Алгоритм 5.**

**Крок 1.** На екрані з'являється перше завдання:

Вибрати означення перерізу по множині відношення.

- Множина таких  $y$ , що пари  $(y, x_i) \in \rho$ , називається перерізом  $\rho(A)$  по множині  $A$  відношення  $\rho$ .

- Множина всіх перерізів  $A(x_i)$  відношення  $\rho$  називається перерізом  $\rho(A)$  по множині  $A$  відношення  $\rho$ .

- Множина, що є об'єднанням перерізів за елементами деякої множини  $A \subset X$  називається перерізом  $\rho(A)$  по множині  $A$  відношення  $\rho$ .

- Множина  $A(x_i)$  таких пар  $(x_i, y)$ , що  $(x_i, y) \notin \rho$  називається перерізом  $\rho(A)$  по множині  $A$  відношення  $\rho$ .

Правильна відповідь – перехід на крок 2.

Інакше – повідомлення про помилку: «Помилка. Множина, що є об'єднанням перерізів за елементами деякої множини  $A \subset X$  називається перерізом  $\rho(A)$  по множині  $A$  відношення  $\rho$ .» Перехід на крок 2.

**Крок 2.** Питання на екрані.

*Виберіть одну правильну відповідь.* Переріз  $\rho(C)$  по множині  $C$  відношення  $\rho$  шукаємо як

-  $\rho(C) = A(1) \cup A(2),$

-  $\rho(C) = A(2) \cup A(3),$

-  $\rho(C) = A(4) \cap A(1),$

-  $\rho(C) = A(1) \cup A(4),$

Правильна відповідь – перехід на крок 3.

Інакше з'являється повідомлення про помилку: «Вибір неправильний. Переріз  $\rho(C)$  по множині  $C$  відношення  $\rho$  шукаємо як об'єднання перерізів  $\rho(C) = A(1) \cup A(4)$ ». Перехід на крок 3.

**Крок 3.** Завдання на екрані.

Заповніть клітини. Переріз по множині  $C$  відношення

$$\rho(C) = \{ \square, \square, \square \}.$$

Користувач одну за одною вводить літери (допустимі три значення, b,c,e). Відповідно, якщо в першу комірку введено одна з трьох допустимих літер, то в наступну можна вводити лише одну з двох, що залишилися. І т.д.

При першому допущенні помилки повідомлення має вигляд:

«Для виконання даного завдання враховуємо, що  $A(1) = \{b, c\}$ ,  $A(4) = \{e\}$  .»

Якщо знову користувач помиляється, то повідомлення: «Помилка. Переріз по множині  $C$  відношення  $\rho(C) = A(1) \cup A(4) = \{b, c\} \cup \{e\} = \{b, c, e\}$  .»

### 3.1.3 Алгоритми реалізації способів представлення відношень

*Приклад 6.* Нехай задано відношення  $\rho$ : « $x$  є дільником  $y$ » на множинах  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  та  $B = \{8, 9, 15, 20, 25\}$ ,  $\rho \subseteq A \times B$ .

Завдання:

- 1) записати задане відношення множиною впорядкованих пар,
- 2) представити відношення матрицею суміжності,
- 3) представити відношення графом.

**Алгоритм 6.**

**Крок 1.** На екрані:

Для формування впорядкованих пар відношення враховується, що  
- першою координатою пари є

- елементи з множини  $A$
- елементи з множини  $B$
- другою координатою пари є
- елементи з множини  $A$
- елементи з множини  $B$

Вибір правильний – перехід на наступний крок.

Якщо вибір помилковий, то з'являється повідомлення: «Відношення  $\rho$  є підмножиною декартового добутку, тобто  $\rho \subseteq A \times B$ . А декартовий добуток – це множина впорядкованих пар  $(a, b) \in A \times B$  таких, що  $a \in A$ ,  $b \in B$ , де  $a$  – перша координата,  $b$  – друга координата. Отже, першою координатою пари є елемент із множини  $A$ , а другою – елемент із  $B$  .». Перехід на крок 2.

**Крок 2.** Завдання на екрані:

Виберіть всі пари, які належать заданому відношенню.

- (2,8). • (2,9). • (2,15). • (2,20). • (2,25).
- (3,8). • (3,9). • (3,15). • (3,20). • (3,25).
- (4,8). • (4,9). • (4,15). • (4,20). • (4,25).
- (5,8). • (5,9). • (5,15). • (5,20). • (5,25).

Якщо вибрано всі пари правильно, то на екрані з'являється:

«Відношення, що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(2,8), (2,20), (3,9), (3,15), (4,8), (4,20), (5,15), (5,20), (5,25)\} .»$$

Перехід на наступний крок.

Якщо обрано інші пари, то повідомлення : «Помилка. Серед обраних пар є такі пари  $(x, y)$ , для яких не виконується умова:  $x$  є дільником  $y$  .».

Користувачу надається можливість зробити ще раз вибір. Після другої невдалої спроби автоматично виділяються правильні і неправильні відповіді (наприклад, зеленим та червоним кольором) і нижче відповідь.

«Відношення, що задане множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(2,8),(2,20),(3,9),(3,15),(4,8),(4,20),(5,15),(5,20),(5,25)\} .\rangle$$

Перехід на крок 3.

**Крок 3.** Запитання на екрані:

Якими значеннями можуть бути елементи матриці суміжності відношення, що не містить однакових пар. *Виберіть потрібні варіанти.*

- Число, що дорівнює кількості пар у відношенні.
- 0.
- 1.
- 2.

Повідомлення про помилку: «Помилка. Елементами матриці суміжності відношення, що не містить однакових пар можуть бути 0 та 1.». Перехід на крок 4.

**Крок 4.** На екрані:

*«Заповніть порожні клітинки.*

Матриця суміжності відношення – це таблиця розміру  $m \times n$  ( $m$  – рядків,  $n$  – стовпців), де  $m = |X|$ ,  $n = |Y|$ , що заповнюється наступним чином:

у клітинці, що стоїть в  $i$ -му рядку,  $j$ -му стовпці стоїть  $\boxed{*}$ , якщо  $x_i \rho y_j$ ,  $x_i \in X$ ,  $y_j \in Y$ ;  $\boxed{**}$ , якщо  $x_i$  та  $y_j$  не знаходяться у бінарному відношенні  $\rho$ .»

Правильні відповіді: в клітині  $\boxed{*}$  – 1, у  $\boxed{**}$  – 0.

Якщо ж введено неправильні значення, то з'являється повідомлення: «Матриця суміжності відношення – це таблиця розміру  $m \times n$  ( $m$  – рядків,  $n$  – стовпців), де  $m = |X|$ ,  $n = |Y|$ , що заповнюється наступним чином:

у клітинці, що стоїть в  $i$ -му рядку,  $j$ -му стовпці стоїть 1, якщо  $x_i \rho y_j$ ,  $x_i \in X$ ,  $y_j \in Y$ ; 0, якщо  $x_i$  та  $y_j$  не знаходяться у бінарному відношенні  $\rho$ .»

Перехід на крок 5.

**Крок 5.** На екрані:

*Заповніть клітини таблиці:*


Передбачити можливість введення тільки значень 0 або 1.

Введено все правильно – перехід на наступний крок.

Після заповнення всіх клітинок, здійснюється перевірка і в разі наявності помилкових введенень з'являється повідомлення: «Серед заповнених клітин є ті, що не відповідають означенню матриці суміжності, а саме:

матриця суміжності відношення – це таблиця розміру  $m \times n$  ( $m$  – рядків,  $n$  – стовпців), де  $m = |X|$ ,  $n = |Y|$ , що заповнюється наступним чином:

у клітинці, що стоїть в  $i$ -му рядку,  $j$ -му стовпці стоїть 1, якщо  $x_i \rho y_j$ ,  $x_i \in X$ ,  $y_j \in Y$ ; 0, якщо  $x_i$  та  $y_j$  не знаходяться у бінарному відношенні  $\rho$  .»

Користувачу надається можливість внести корективи.

І якщо знову є помилки, то тренажер автоматично виправляє їх і з'являється відповідь:

Матриця суміжності заданого відношення

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перехід на крок 6.

**Крок 6.** На екрані: *Введіть у порожні клітинки відповідні номери правильного визначення.*

Граф  $\Gamma$  відношення  $S \subseteq N \times N$  – це упорядкована пара  $\langle N, S \rangle$  множини (мультимножини)  $N$  із бінарним відношенням  $S$  у ній. Тобто  $\Gamma = \langle N, S \rangle$ .

$N$  – це  $\square$ ,

$S$  – це  $\square$ ,

1) носій графа (множина вершин)

2) сигнатура графа (множина дуг)

Правильна відповідь:

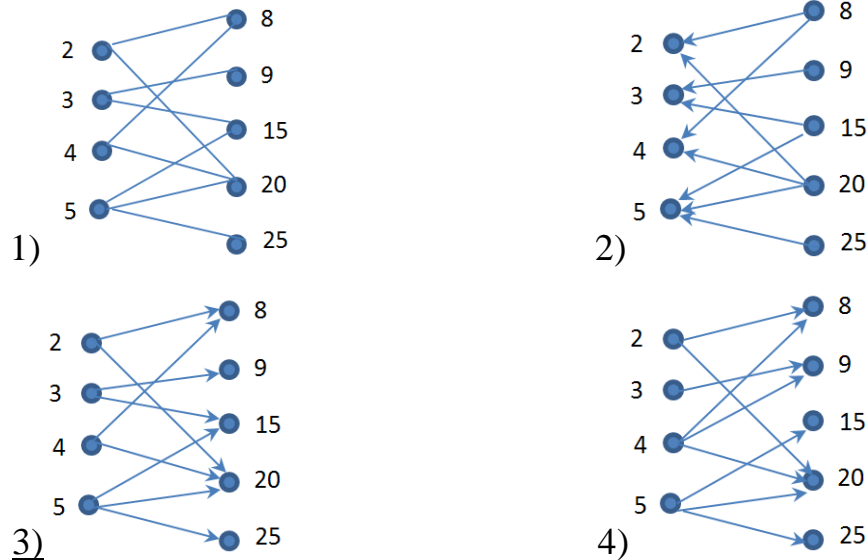
$N$  – це  $\boxed{1}$ ,

$S$  – це  $\boxed{2}$ ,

Повідомлення про помилку: « $N$  – це носій графа (множина вершин),  $S$  – сигнатура графа (множина дуг)». Перехід на крок 7.

### Крок 7. На екрані

Виберіть серед графів той, що відповідає заданому відношенню



Якщо обрано відповідь 1), то повідомлення про помилку: «В даному графі дуги неорієнтовані. Але у графі заданого відношення дуги мають напрям.»

Якщо обрано відповідь 2), то повідомлення про помилку: «В даному графі дуги відповідають впорядкованим парам  $(8,2)$ ,  $(8,4)$ ,  $(9,3)$ ,  $(15,3)$ ,  $(20,2)$ ,  $(20,4)$ ,  $(15,5)$ ,  $(20,5)$ ,  $(25,5)$ . Але вони не належать заданому відношенню.»

Якщо обрано відповідь 4), то повідомлення про помилку: «В даному графі немає дуги, що відповідає парі  $(3,15)$ , яка належить заданому відношенню  $\rho$ . Крім того, є дуга  $(4,9)$ , яка не належить  $\rho$ ». Завершення тренінгу.

## **4. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА**

### **4.1. Блок-схема**

На рис. 4.1-4.4 подано блок-схему алгоритму першого і другого прикладу (окремих кроків). Інші кроки зображуються аналогічно.

### **4.2. Інструкція користувача**

На рис. 4.5-4.26 показано, як працює тренажер, коли обрана перша тема. Тут подано лише приклад 1.

У програмі при вірній відповіді – відбувається перехід до наступного кроку. При помилці – з'являється пояснення помилки (наприклад, як на рис. 4.8) і також здійснюється перехід до наступного кроку.

Крок 4 та 6 в залежності від того, в якому порядку вводяться цифри, може видавати різні пояснення помилки (див., наприклад, рис. 4.14-4.17 або рис. 4.21-4.25).

По завершенню прикладу 1 з'являється повідомлення про це (рис. 4.26) та відбувається перехід до прикладу 2.

Робота прикладу 2 цієї теми та робота інших тем показана у додатках.



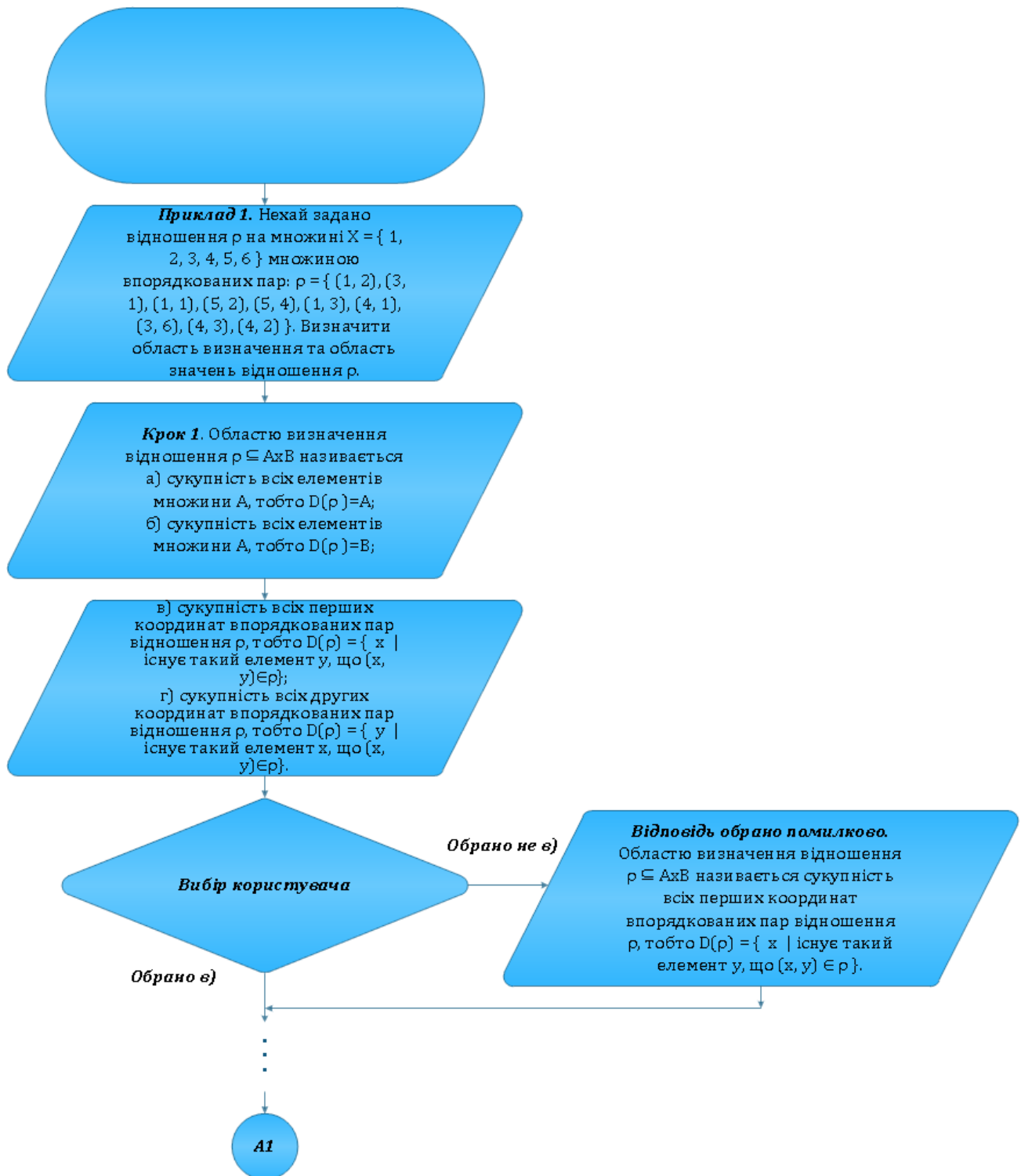


Рисунок 4.1 – Блок-схема

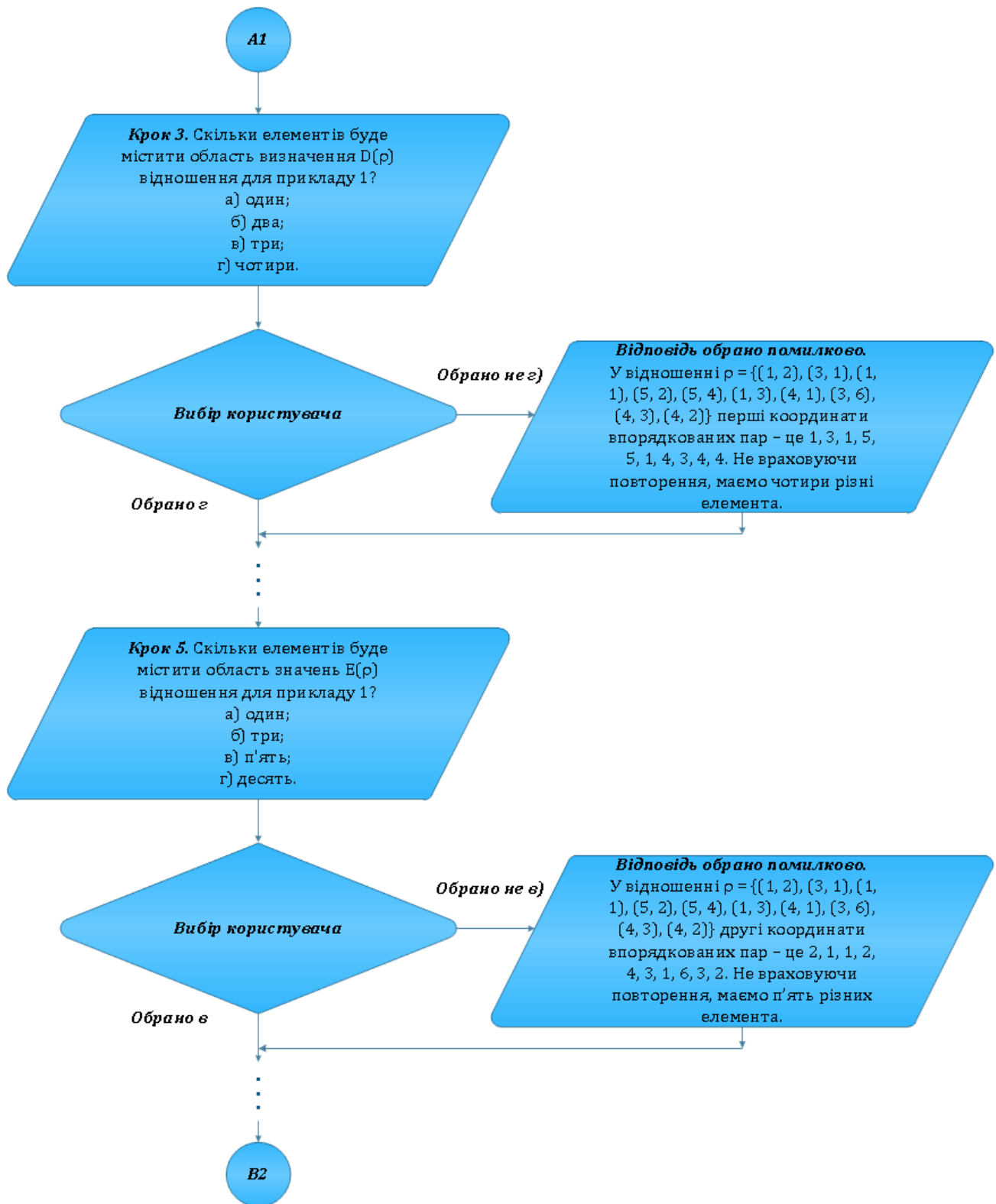


Рисунок 4.2 – Блок-схема

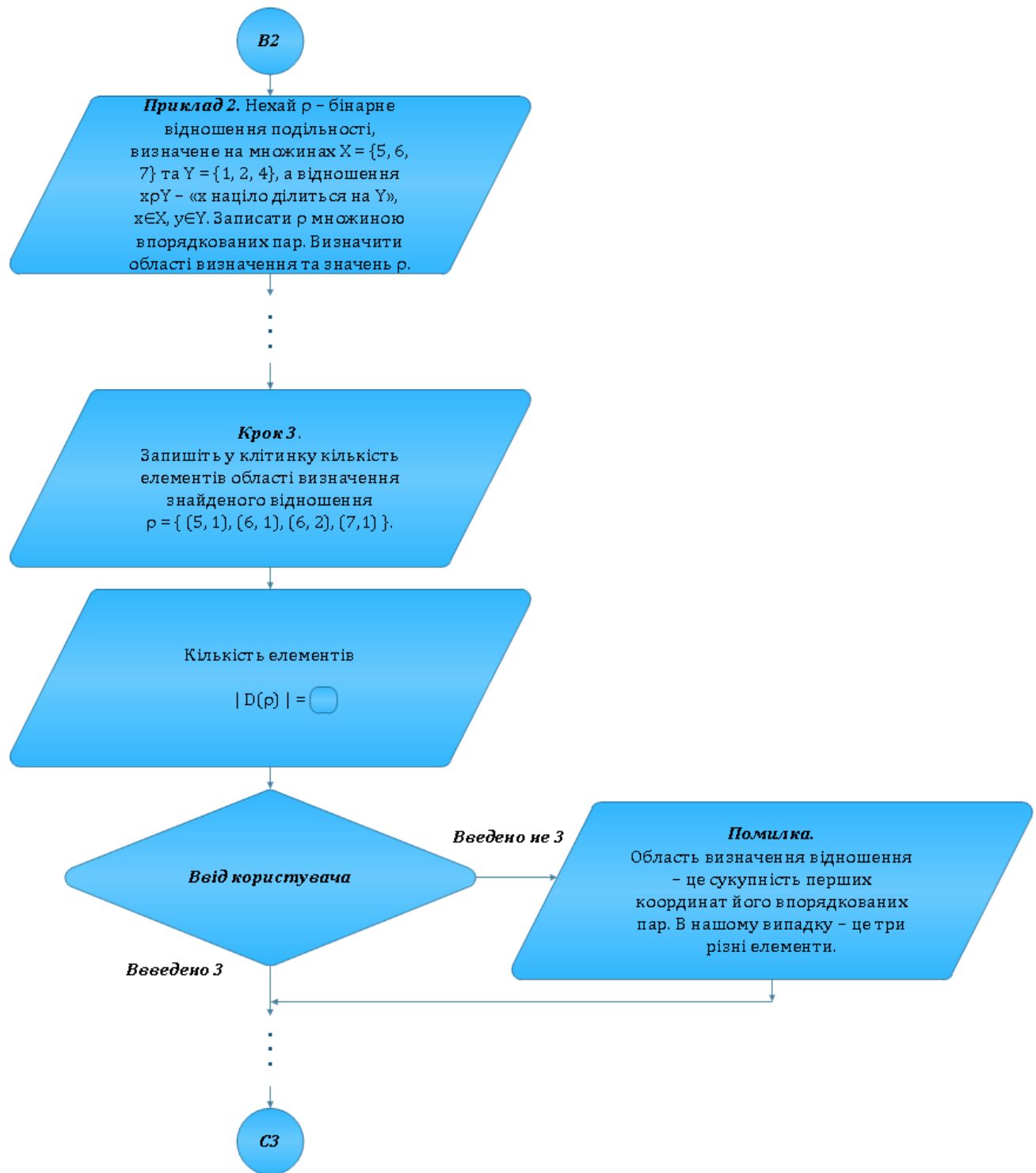


Рисунок 4.3 – Блок-схема

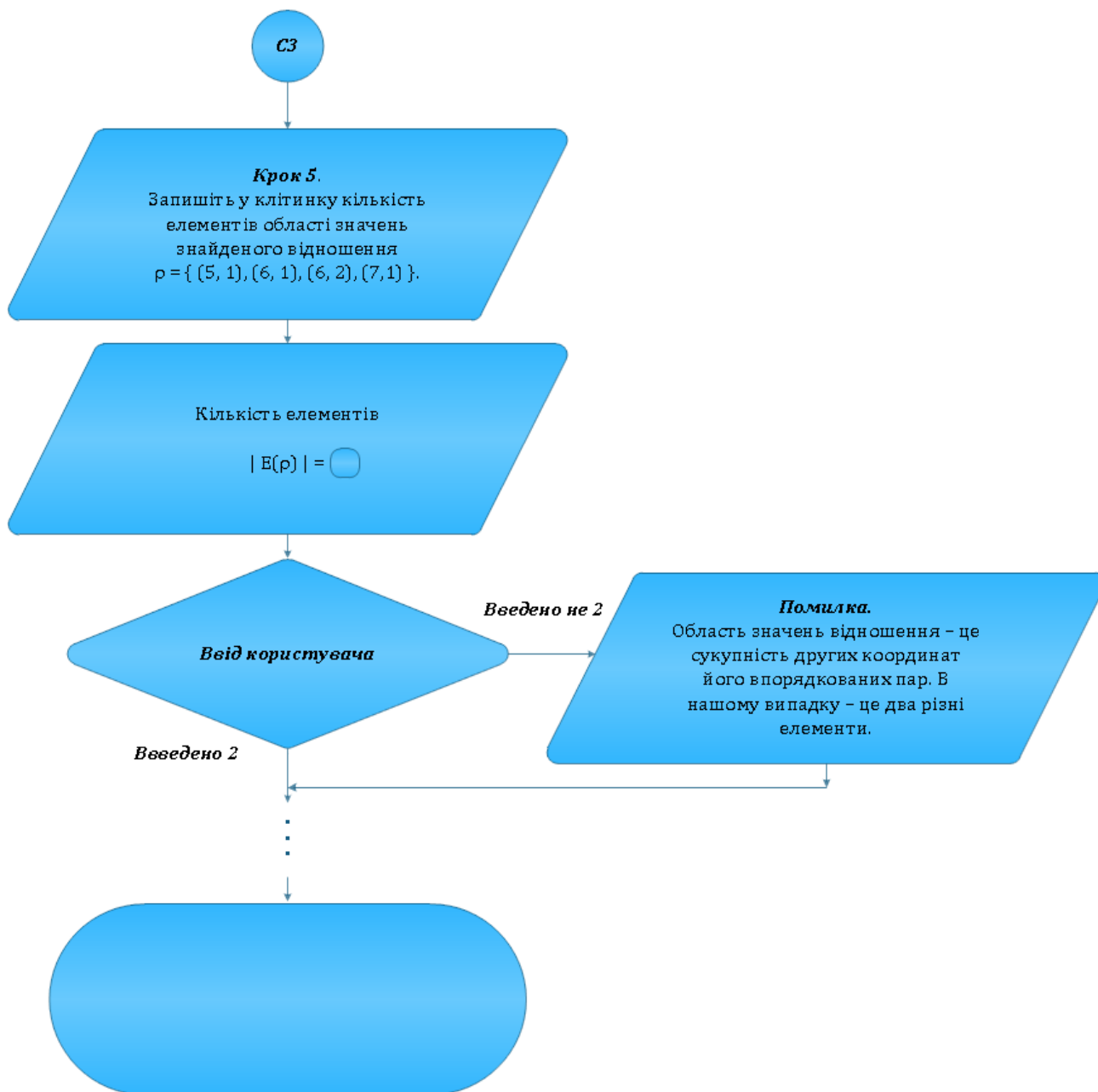


Рисунок 4.4 – Блок-схема

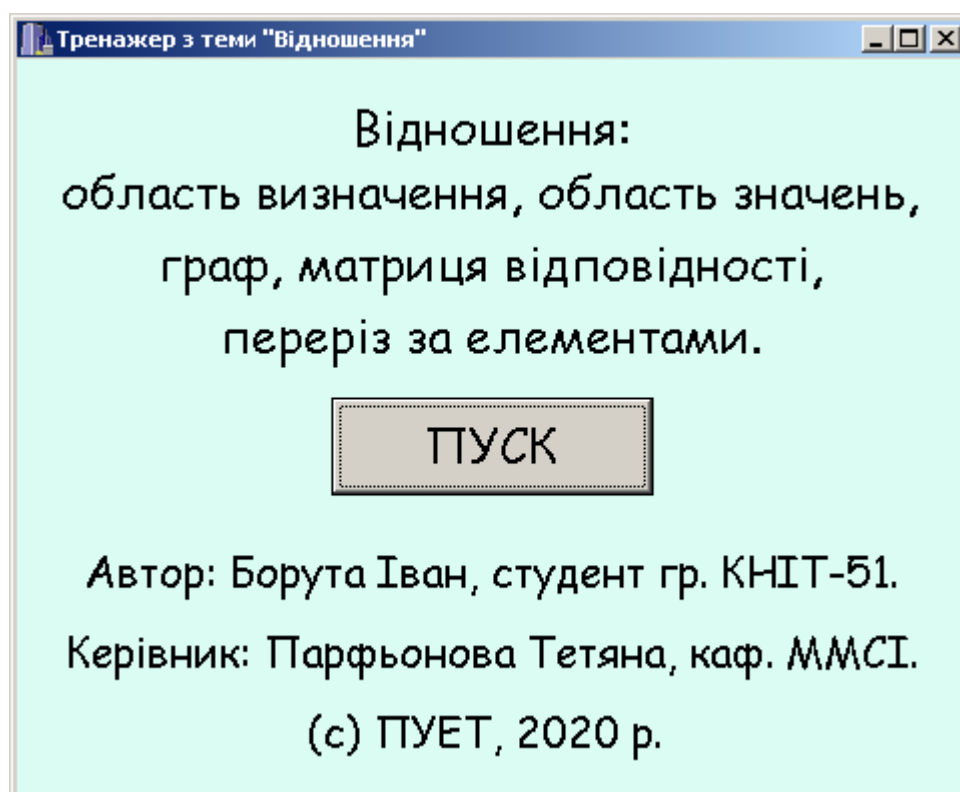


Рисунок 4.5 – Перше вікно програми

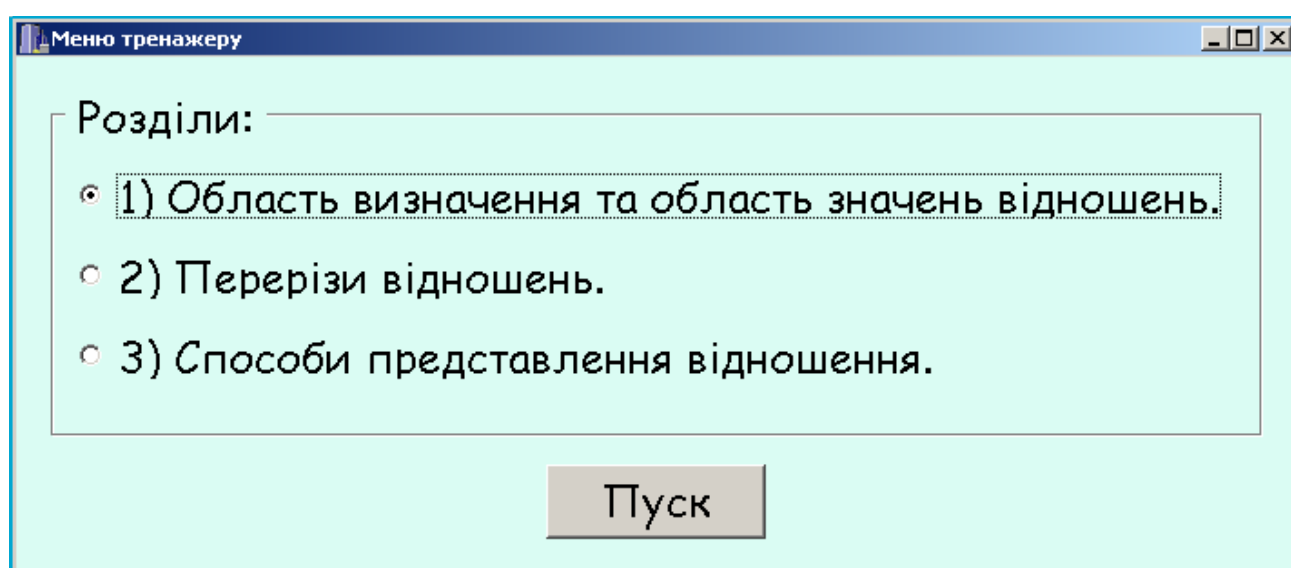


Рисунок 4.6 – Меню

Приклад 1 -> Крок 1

### Приклад 1

Нехай задано відношення  $\rho$  на множині  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}$$

Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

---

### Крок 1

Областю визначення відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається

- сукупність всіх елементів множини  $A$ , тобто  $D(\rho) = A$ ;
- сукупність всіх елементів множини  $B$ , тобто  $D(\rho) = B$ ;
- сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $D(\rho) = \{x \mid \text{існує такий елемент } y, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ ;
- сукупність всіх других координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто  $D(\rho) = \{y \mid \text{існує такий елемент } x, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$ .

Перевірка

Рисунок 4.7 – Крок 1 з вірною відповіддю

Помилка!

### Відповідь обрано помилково!

Областю визначення відношення  $\rho \subseteq A \times B$  називається сукупність всіх перших координат впорядкованих пар відношення  $\rho$ , тобто

$$D(\rho) = \{x \mid \text{існує такий елемент } y, \text{ що } (x, y) \in \rho\}$$

✓ OK

Рисунок 4.8 – Пояснення помилки для кроку 1

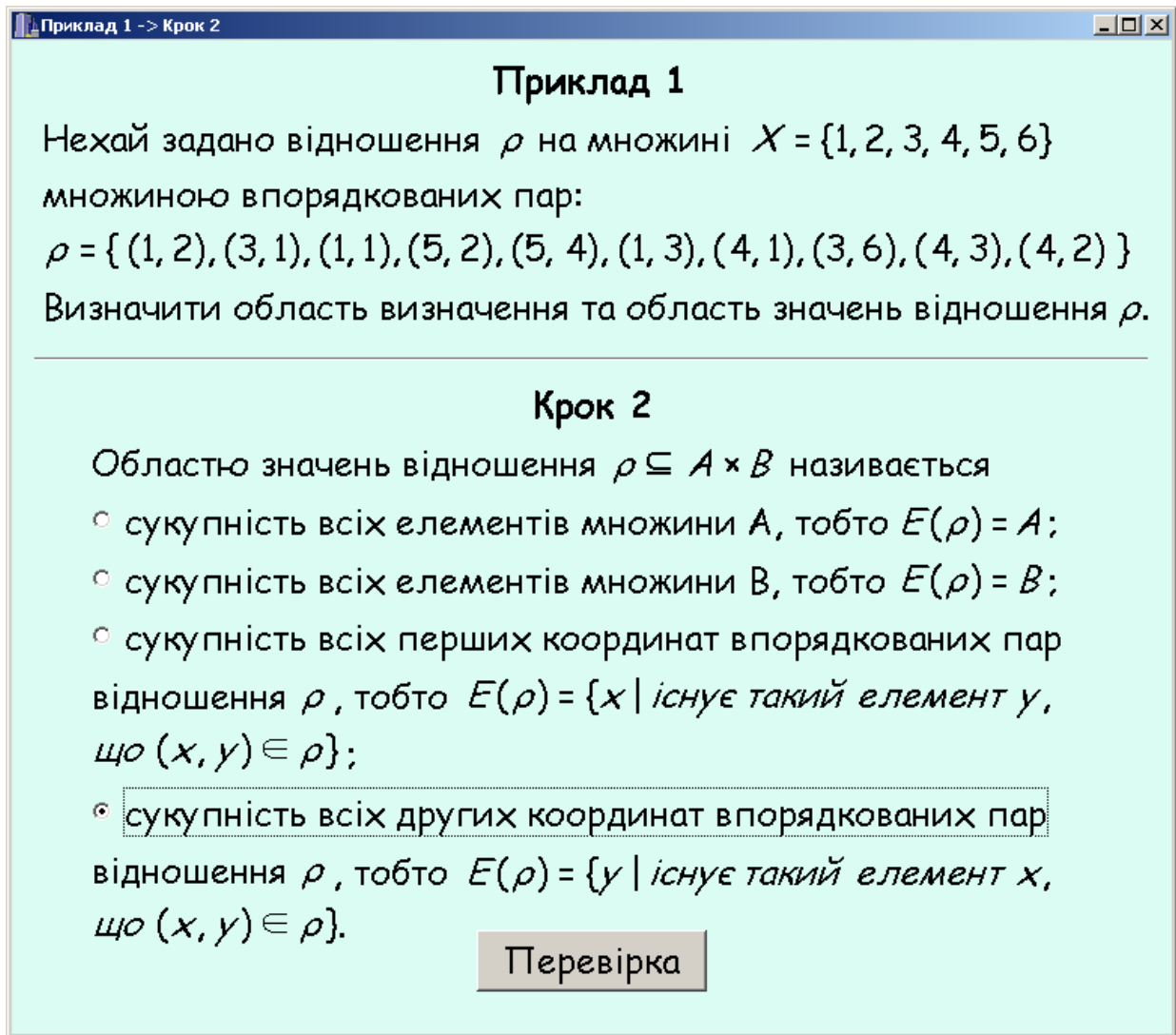


Рисунок 4.9 – Крок 2 з вірною відповіддю

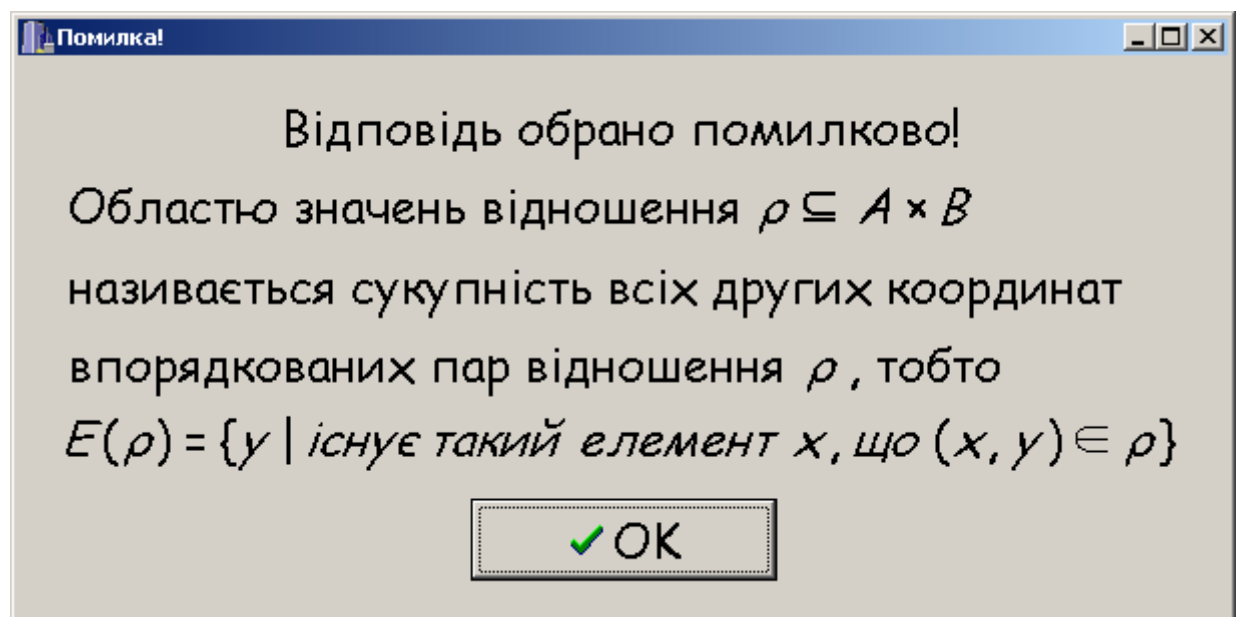


Рисунок 4.10 – Пояснення помилки для кроку 2

Приклад 1 -> Крок 3

### Приклад 1

Нехай задано відношення  $\rho$  на множині  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}$$

Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

---

### Крок 3

Скільки елементів буде містити область визначення  $D(\rho)$  відношення для прикладу 1?

☐ один;
 ☐ три;
 ☐ два;
 ☒ чотири.

Перевірка

Рисунок 4.11 – Крок 3 з вірною відповіддю

Помилка!

Відповідь обрано помилково!

У відношенні  $\rho = \{(1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2)\}$  перші координати впорядкованих пар - це 1, 3, 1, 5, 5, 1, 4, 3, 4, 4. Не враховуючи повторення, маємо чотири різні елемента.

✓ OK

Рисунок 4.12 – Пояснення помилки для кроку 3



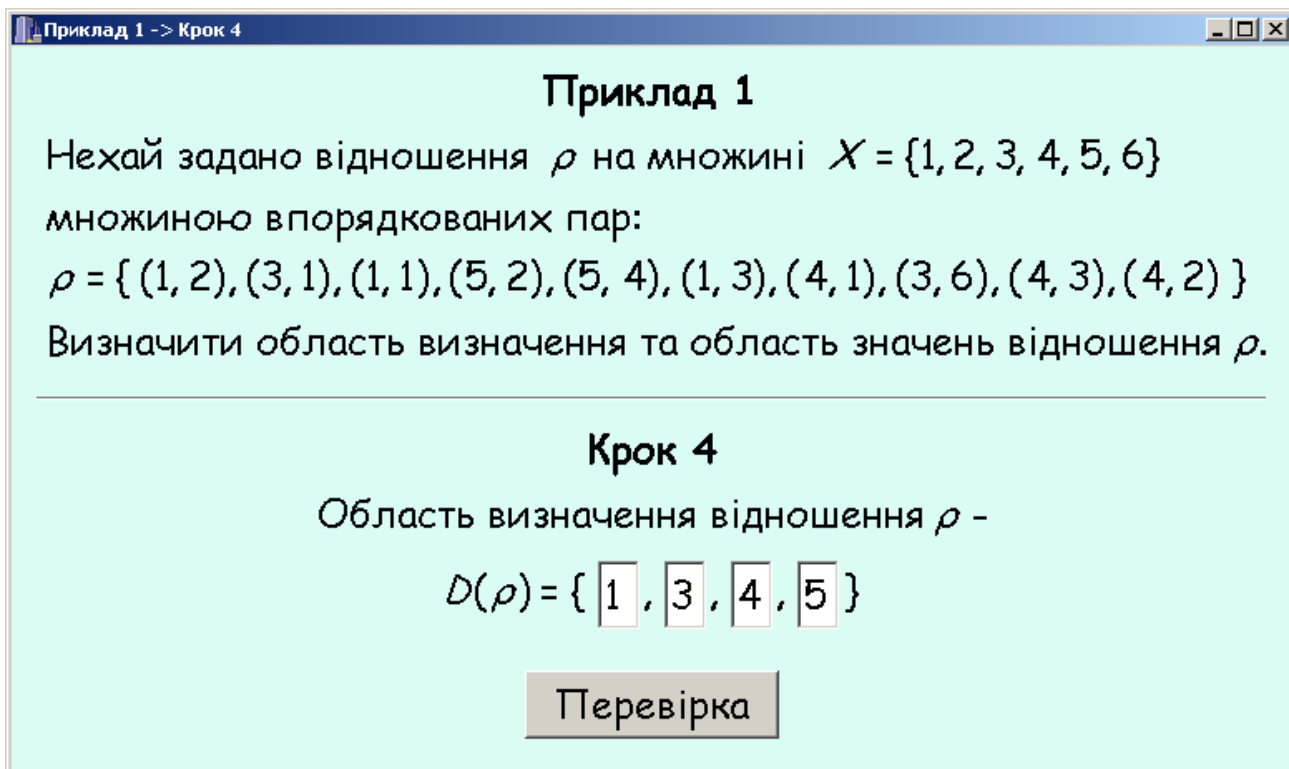


Рисунок 4.13 – Крок 4 з однією з можливих вірних відповідей

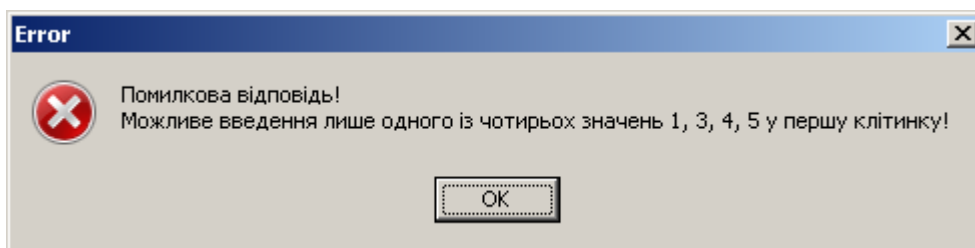


Рисунок 4.14 – Пояснення помилки клітинки 1 для кроку 4 (один з варіантів)

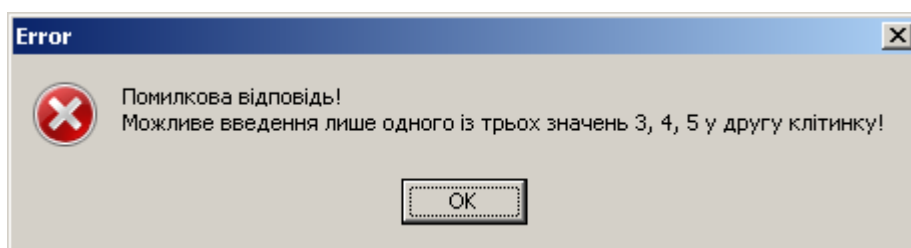


Рисунок 4.15 – Пояснення помилки клітинки 2 для кроку 4 (один з варіантів)

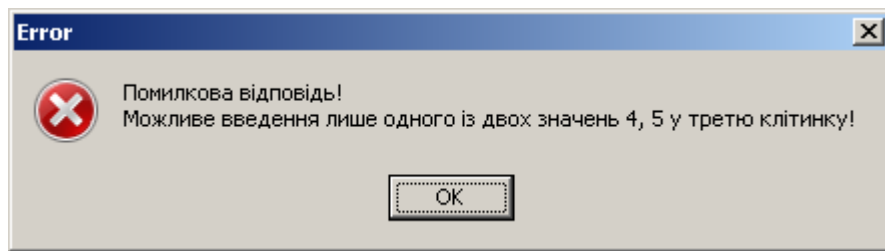


Рисунок 4.16 – Пояснення помилки клітинки 3 для кроку 4 (один з варіантів)

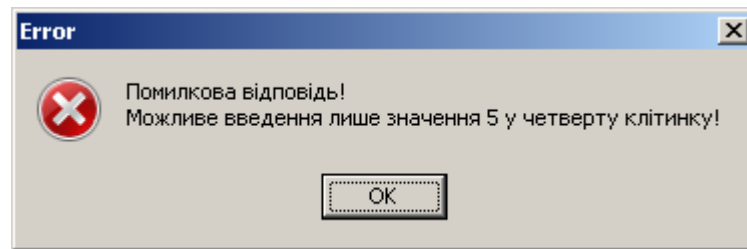


Рисунок 4.17 – Пояснення помилки клітинки 4 для кроку 4 (один з варіантів)

Приклад 1 -> Крок 5

Приклад 1

Нехай задано відношення  $\rho$  на множині  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  множиною впорядкованих пар:

$$\rho = \{ (1, 2), (3, 1), (1, 1), (5, 2), (5, 4), (1, 3), (4, 1), (3, 6), (4, 3), (4, 2) \}$$

Визначити область визначення та область значень відношення  $\rho$ .

---

Крок 5

Скільки елементів буде містити область значень  $E(\rho)$  відношення для прикладу 1?

☐ один;
 ☐ три;

☒ п'ять;
 ☐ десять.

Перевірка

Рисунок 4.18 – Крок 5 з вірною відповіддю

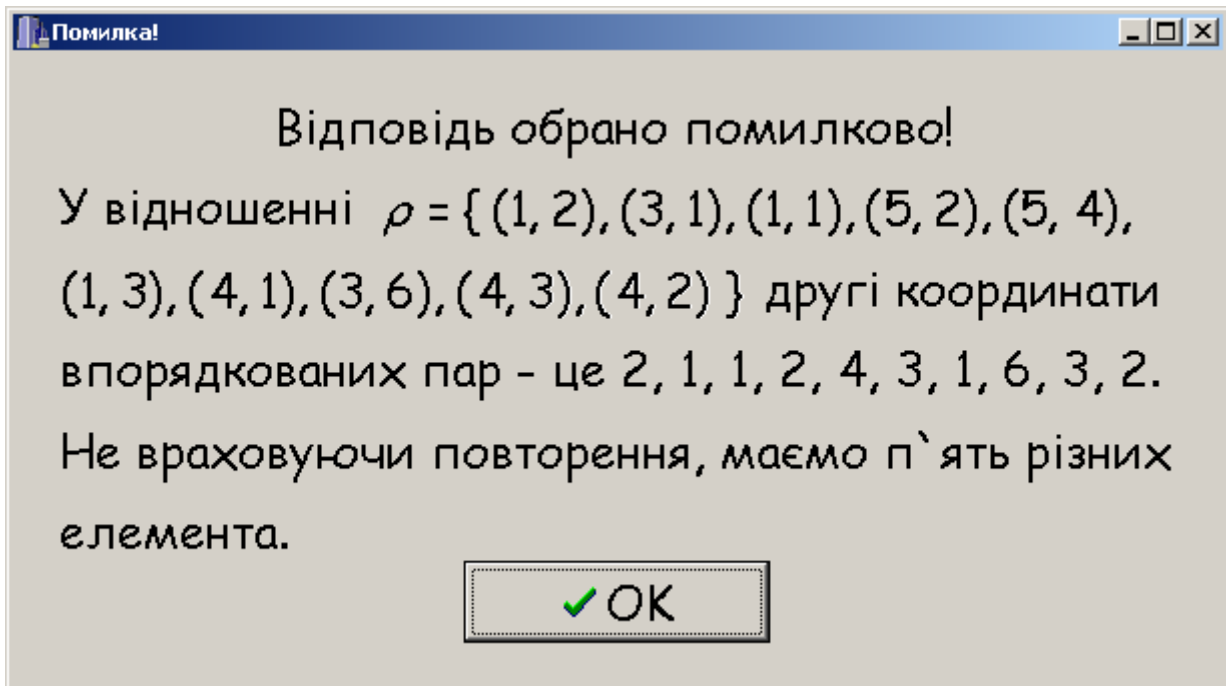


Рисунок 4.19 – Пояснення помилки для кроку 5

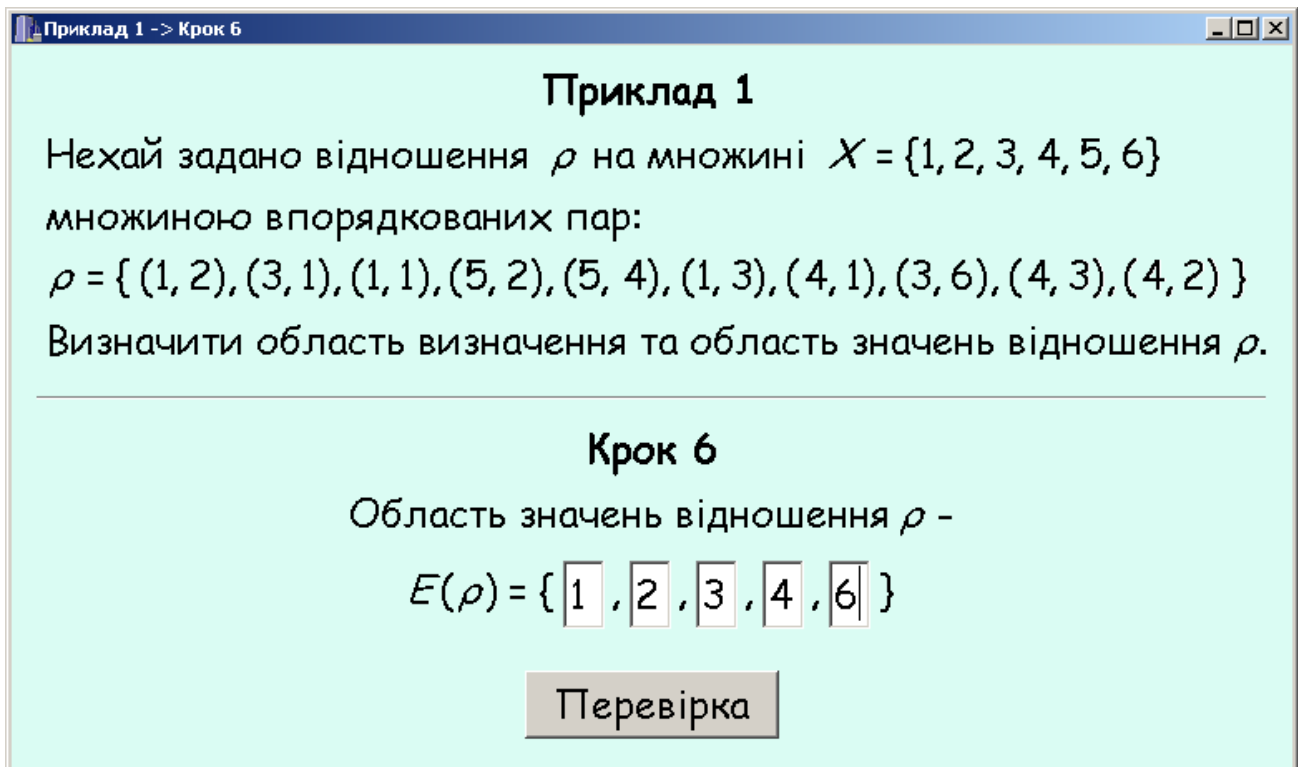


Рисунок 4.20 – Крок 6 з однією з можливих вірних відповідей

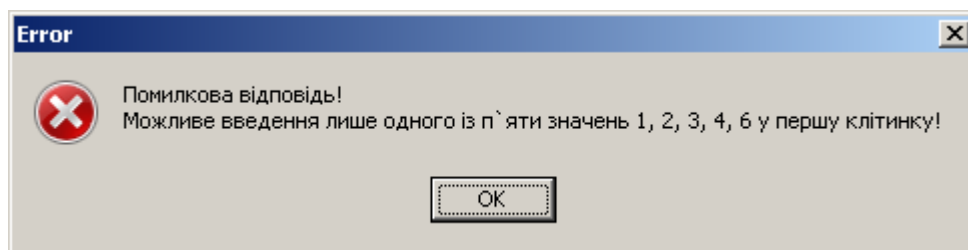


Рисунок 4.21 – Пояснення помилки клітинки 1 для кроку 6 (один з варіантів)

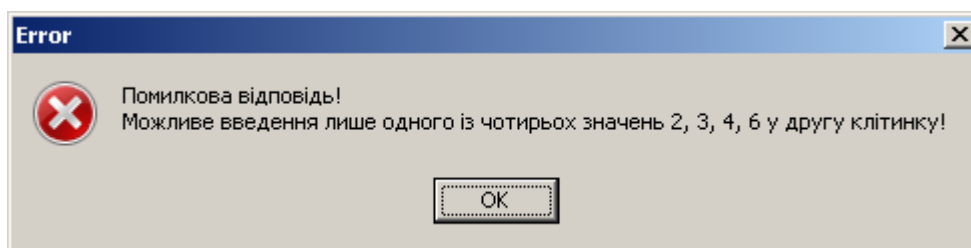


Рисунок 4.22 – Пояснення помилки клітинки 2 для кроку 6 (один з варіантів)

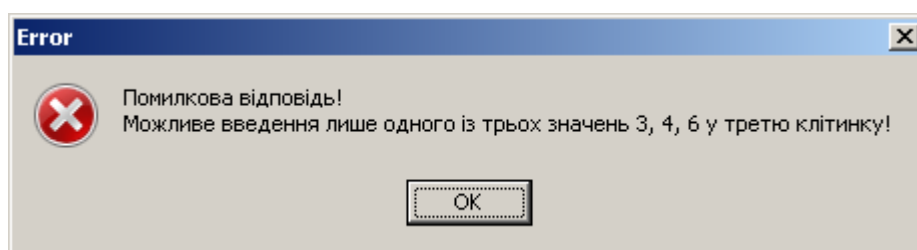


Рисунок 4.23 – Пояснення помилки клітинки 3 для кроку 6 (один з варіантів)

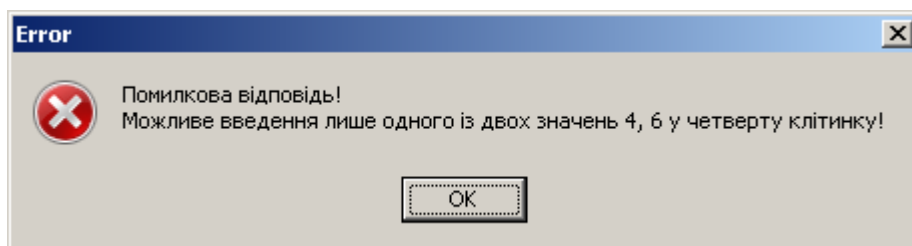


Рисунок 4.24 – Пояснення помилки клітинки 4 для кроку 6 (один з варіантів)

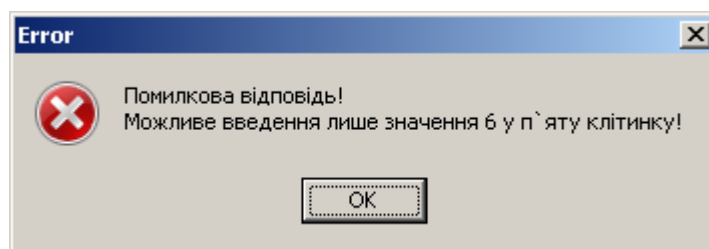


Рисунок 4.25 – Пояснення помилки клітинки 5 для кроку 6 (один з варіантів)

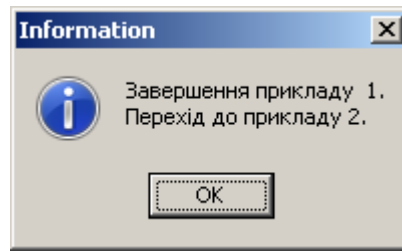


Рисунок 4.26 – Повідомлення про завершення тренінгу з прикладом 1

### 4.3. Опис реалізації тренажеру

Для створення програми було обрано мову програмування **C++** та середовище **Borland Builder**.

Тренажер складається з *трьох тем*. Перша тема містить два приклади; друга – 3 приклади, третя – один приклад.

При створенні дизайну програми для кожного прикладу було обрано свій колір фону.

Кожному кроку відповідає своя форма. Шрифт для форм було обрано «Comic Sans MS», розмір – 18 пунктів. У зв'язку з цим усі формули, що використовуються в тренажері, були перенабрані у MS Word-і з використанням шрифту Comic Sans MS та 18 розміру шрифту. Далі формули були збережені як картинки та розташовані на формах. Перенабор формул був здійснений для того, що формули гармонійно поєднувались з текстовою інформацією.

**Тренажер містить різнопланові кроки**, такі як:

- вибір однієї вірної відповіді з чотирьох наданих альтернатив, заданих текстом (наприклад, тема «Область визначення та область значень відношень», приклад 1, крок 1);
- вибір однієї вірної відповіді з чотирьох наданих альтернатив, заданих картинками (тема «Способи представлення відношення», крок 7);
- вибір декількох вірних відповідей з наданих альтернатив (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 1, крок 3);
- вибір вірної відповіді зі списку, що розгортається (наприклад, тема «Способи представлення відношення», крок 1);

- ввід користувачем числової інформації у клітинки (наприклад, тема «Область визначення та область значень відношень», приклад 1, крок 4);
- ввід користувачем літерної інформації у клітинки (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 3, крок 3);
- ввід користувачем інформації у таблицю (тема «Способи представлення відношення», крок 5).

***Варіанти, як реагує програма на вірні чи невірні відповіді користувача, теж різняться. Серед них є такі:***

- після невірної відповіді з'являється пояснення помилки у окремому вікні та відбувається перехід до наступного кроку (наприклад, тема «Область визначення та область значень відношень», приклад 1, крок 1);
- після невірної відповіді, з'являється пояснення помилки та при цьому програма контролює, щоб числа були з певної коректної множини значень (наприклад, тема «Область визначення та область значень відношень», приклад 1, крок 4);
- користувачу даються дві можливості помилитися, після кожної спроби з'являється своє пояснення помилки, і після другої помилки відбувається перехід до наступного кроку (наприклад, тема «Область визначення та область значень відношень», приклад 2, крок 1);
- при введенні числових значень у клітинки з'являється своє пояснення помилки для кожної клітинки; ввід та пояснення з'являються по мірі відповідей користувача (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 1, крок 2);
- при виборі відповідей з'являється своє пояснення помилки для кожного рядку; ввід та пояснення з'являються по натисненню кнопки «Перевірка» (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 1, крок 3);

- при вірній відповіді на формі з'являється результуюча фраза, кнопка «Перевірка» змінюється на кнопку «Далі», при натисненні на яку відбувається перехід до наступного кроку (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 1, крок 3);
- після невірної відповіді, з'являється пояснення помилки та при цьому програма контролює, щоб літери були з певної коректної множини значень. При цьому програма після першої помилки виводить одне пояснення, а після другої – інше (наприклад, тема «Перерізи відношень», приклад 3, крок 3);
- після невірної відповіді програма виправляє відповіді на вірні (наприклад, тема «Способи представлення відношення», крок 5) тощо.

Найбільш складними кроками в реалізації були кроки 4 та 6 прикладу 1 теми «Область визначення та область значень відношень».

***В якості прикладу розглянемо код кроку 4.***

На цьому етапі 4 клітинки, і користувач в довільному порядку може ввести цифри 1, 3, 4, 5. Програма повинна відслідкувати, що вводяться саме ці цифри.

Спочатку користувач вводить інформацію ***в першу клітинку***.

Для клітинки (це компонент Edit1) взята подія OnExit, яка спрацьовує, коли компонент втрачає фокус, тобто користувач переставляє курсор в іншу клітинку або натискає кнопку «Перевірка».

// перша клітинка

```
void __fastcall TForm9::Edit1Exit(TObject *Sender)
{
    if ((Edit1->Text=="1") || (Edit1->Text=="3") || (Edit1->Text=="4") || (Edit1-
    >Text=="5"))
        Edit2->SetFocus();
    else
```

```

{   MessageDlg("Помилкова відповідь!\nМожливе введення лише одного із
    чотирьох значень 1, 3, 4, 5 у першу клітинку!", mtError, TMsgDlgButtons() <<
    mbOK, 0);
    Edit1->Text=="";
    Edit1->SetFocus();
}
}

```

Як видно з коду, якщо інформація у компоненті (Edit1->Text) відрізняється від еталонних цифр, то видається повідомлення про помилку (рядок MessageDlg), компонент очищається (Edit1->Text=="") та курсор залишається в цьому компонентові (Edit1->SetFocus()).

При правильному вводі йде перехід курсору в другу клітинку (Edit2->SetFocus()).

Далі користувач вводить інформацію *в другу клітинку*.

```

// друга клітинка
void __fastcall TForm9::Edit2Exit(TObject *Sender)
{
    if (Edit1->Text=="1")
    {
        if ((Edit2->Text=="3")||(Edit2->Text=="4")||(Edit2->Text=="5"))
        {
            Edit3->SetFocus();
            return;
        }
        else
        {
            MessageDlg("Помилкова відповідь!\nМожливе введення лише одного із трьох
                значень 3, 4, 5 у другу клітинку!", mtError, TMsgDlgButtons() << mbOK, 0);
            Edit2->Text=="";

```



```

    Edit2->SetFocus();
    return;
}
}
...
}

```

Як видно з коду вище (тут представлено лише чверть коду), спочатку перевіряється, що за інформація у першій клітинці. Після вводу у першу клітинку можливі варіанти, що у першій клітинці 1, 3, 4 або 5. Тут показано випадок, коли в першій клітинці 1. Інші варіанти аналогічні.

Якщо в першій клітинці 1 (if (Edit1->Text=="1")) і якщо в другій клітинці 3, 4 або (if ((Edit2->Text=="3")||(Edit2->Text=="4")||(Edit2->Text=="5))), то відбувається переміщення курсору до третьої клітинки (Edit3->SetFocus()) та вихід з обробника події Edit2Exit (return).

Якщо в другій клітинці записано щось інше (гілка else {...}), то з'являється повідомлення про помилку (рядок MessageDlg), друга клітинка очищається (Edit2->Text==""), курсор залишається в цій клітинці (Edit2->SetFocus()).

Після користувач вводить інформацію *в третю клітинку*.

```

// третя клітинка
void __fastcall TForm9::Edit3Exit(TObject *Sender)
{
    if (((Edit1->Text=="1") && (Edit2->Text=="3")) || ((Edit1->Text=="3") && (Edit2->Text=="1")))
    {
        if ((Edit3->Text=="4")||(Edit3->Text=="5"))
        {
            Edit4->SetFocus();
            return;
        }
    }
}

```

```

    }
else
{
    MessageDlg("Помилкова відповідь!\nМожливе введення лише одного із двох
значень 4, 5 у третю клітинку!", mtError, TMsgDlgButtons() << mbOK, 0);
    Edit3->Text=="";
    Edit3->SetFocus();
    return;
}
}
...
}

```

Як видно з коду вище (тут показана лише шоста частина коду), спочатку перевіряється, що за інформація у перших двох клітинках. Є шість варіантів, що знаходиться у перших двох клітинках. Тут показано випадок, коли в першій клітинці 1, а в другій – 3. Інші варіанти подібні.

Якщо в першій клітинці 1, а в другій 3 (if (((Edit1->Text=="1") && (Edit2->Text=="3")) || ((Edit1->Text=="3") && (Edit2->Text=="1")))) і якщо в третій та четвертій клітинках 4 та 5 (if ((Edit3->Text=="4") || (Edit3->Text=="5"))), то відбувається переміщення курсору до четвертої клітинки (Edit4->SetFocus()) та вихід з обробника події Edit3Exit (return).

Якщо в третю клітинку внесено щось інше (гілка else {...}), то з'являється повідомлення з поясненням похибки (рядок MessageDlg), вміст третьої клітинки видаляється (Edit3->Text==""), курсор залишається тут же (Edit3->SetFocus()).

Наостанок, студент вводить інформацію у *четверту клітинку*.

```

// четверта клітинка
void __fastcall TForm9::Edit4Exit(TObject *Sender)
{

```

```

if ( ((Edit1->Text=="1") && (Edit2->Text=="3") && (Edit3->Text=="4"))
    || ((Edit1->Text=="1") && (Edit2->Text=="4") && (Edit3->Text=="3"))
    || ((Edit1->Text=="3") && (Edit2->Text=="1") && (Edit3->Text=="4"))
    || ((Edit1->Text=="3") && (Edit2->Text=="4") && (Edit3->Text=="1"))
    || ((Edit1->Text=="4") && (Edit2->Text=="1") && (Edit3->Text=="3"))
    || ((Edit1->Text=="4") && (Edit2->Text=="3") && (Edit3->Text=="1")) )
{
    if (Edit4->Text=="5")
    {
        Form11->Show();
        Form9->Hide();
        return;
    }
    else
    {
        MessageDlg("Помилкова відповідь!\nМожливе введення лише значення 5 у
четверту клітинку!", mtError, TMsgDlgButtons() << mbOK, 0);
        Edit4->Text=="";
        Edit4->SetFocus();
        return;
    }
}
...
}

```

Як впливає з коду вище (тут показана лише четверта частина коду), спочатку перевіряється, що за інформація у перших трьох клітинках. Тут показано випадок, коли у перших трьох клітинках в різних варіантах стоять числа 1, 3, 4. Інші випадки кодуються подібно.

Якщо в у перших трьох клітинках стоять числа 1, 3, 4 (перше if) і якщо в четвертій клітинках стоїть 5 (if (Edit4->Text=="5")), то відбувається перехід до наступного кроку (Form11->Show()); поточна форма закривається (Form9->Hide()); йде вихід з обробника події Edit4Exit (return).

Якщо в четверту клітинку внесено інша інформація (гілка else {...}), то з'являється повідомлення про похибку (рядок MessageBox), вміст четвертої клітинки видаляється (Edit4->Text==""), курсор залишається в цій клітинці (Edit4->SetFocus()), йде вихід з обробника події Edit4Exit (return).

Код перших п'яти кроків прикладу 1 теми «Область визначення та область значень відношень» представлено у додатку.

## ВИСНОВКИ

В рамках виконання бакалаврської роботи побудовано алгоритм та створено програмну реалізацію навчального тренажеру з теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика».

Для досягнення мети були реалізовані наступні завдання:

- опрацьовано методичні рекомендації до виконання бакалаврської роботи;
- сформульовано постановку задачі;
- виконано огляд літературних джерел, що використовується для вивчення даної теми, а також здійснено огляд існуючих програмних продуктів, які використовуються при вивченні різних дисциплін;
- опрацьовано теоретичний матеріал з теми;
- розроблено алгоритм навчального тренажеру;
- побудовано блок–схеми алгоритму тренажеру;
- здійснено вибір оптимальної платформи для програмної реалізації тренажеру;
- реалізована програма-тренажер;
- здійснено опис програми.

Для створення програми було обрано мову програмування C++ та середовище *Borland Builder*.

Даний тренажер впроваджено для вивчення теми «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» в дистанційний курс «Дискретна математика» в Полтавському університеті економіки та торгівлі.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аляев Ю.А. Дискретная математика и математическая логика: учебник / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.: ил.
2. Бондаренко М.Ф. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2008. – 480 с.
3. Донской В. И. Дискретная математика – Симферополь: СОНАТ, 2000. – 360 с.
4. Ємець, О.О. Дискретна математика: Навчальний посібник / О.О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – 2-ге вид., доп. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с. – Режим доступу:  
<http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552>
5. Ємець О.О. Про розробку тренажерів для дистанційних курсів кафедрою ММСІ ПУЕТ / О.О. Ємець // Інформатика та системні науки (ІСН-2015): матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 19–21 берез. 2015 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2015. – С. 152-161.
6. Нікольський Ю.В. Дискретна математика / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 368 с.
7. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.– Дніпродзержинськ: ДДТ, 2015.– 256 с.
8. Трохимчук Р.М. Дискретна математика: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – К.: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010. – 528 с.
9. Сопронюк Т.М. С646 Технології візуального й узагальненого програмування в С++Builder: Навчальний посібник. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – 80 с.
10. Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали IV Всеукр. наук.-прак. конф., (м. Полтава, 21-23 берез. 2013р.) / за ред. Ємця О.О. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – 323 с.